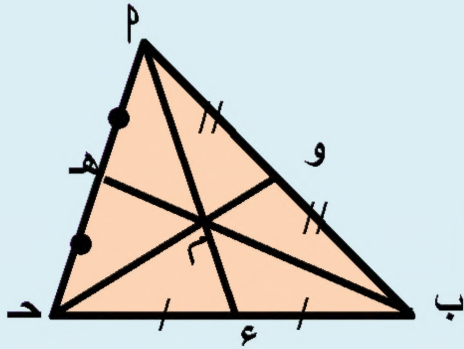


المتميز



في الرياضيات

=

+

>

<

الصف الثاني الإعدادي
الفصل الدراسي الأول

إعداد : أحمد الشننوري

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

أحمد الله و اشكره و أثنى عليه أن أعاننى

و وفقتى لتقديم هذا الكتاب من مجموعة

" المتميز "

فى الرياضيات لأقدمه لأبنائى المتعلمين

و إخوانى المعلمين و الذى راعيت فيه

تقديم المادة العلمية بطريقة مبسطة و ممتعة

مدللاً بأمثلة محلولة ثم تدريبات متنوعة و متدرجة

للتدريب على كيفية الحل لتناسب كل المستويات

و مرفق حلولها كاملة فى آخر الكتاب

متمنياً أن ينال رضاكم و ثقفتكم التى أعز بها

و الله لا يضيع أجر من أحسن عملا

و هو ولى التوفيق

أحمد الشنتوى

المحتويات

الوحدة الأولى : الأعداد الحقيقية
مراجعة

* الدرس الأول : الجذر التكعيبي للعدد النسبي

* الدرس الثانى : مجموعة الأعداد غير النسبية

* الدرس الثالث : ايجاد قيمة تقريبية لعدد غير نسبي

* الدرس الرابع : مجموعة الأعداد الحقيقية ح

* الدرس الخامس : علاقة الترتيب فى ح

* الدرس السادس : الفترات

* الدرس السابع : العمليات على الأعداد الحقيقية

* الدرس الثامن : العمليات على الجذور التربيعية

* الدرس التاسع : العمليات على الجذور التكعيبية

* الدرس العاشر : تطبيقات على الأعداد الحقيقية

* الدرس الحادى عشر : حل المعادلات و المتباينات من

الدرجة الأولى فى متغير فى ح

الوحدة الثانية : العلاقة بين متغيرين

* الدرس الأول : العلاقة بين متغيرين

* الدرس الثانى : ميل الخط المستقيم و تطبيقات حياتية

الوحدة الثالثة : الإحصاء

* الدرس الأول : جمع البيانات و تنظيمها

* الدرس الثانى : الجدول التكرارى المتجمع الصاعد و الجدول

التكرارى النازل و تمثيليهما بيانياً

* الدرس الثالث : الوسط الحسابى - الوسيط - المنوال

الوحدة الرابعة : متوسطات المثلث و المثلث المتساوى الساقين

* الدرس الأول : متوسطات المثلث

* الدرس الثانى : المثلث المتساوى الساقين

* الدرس الثالث : نظريات المثلث المتساوى الساقين

* الدرس الرابع : نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين

الوحدة الخامسة : التباين

* الدرس الأول : التباين

* الدرس الثانى : المقارنة بين قياسات زوايا المثلث

* الدرس الثالث : المقارنة بين أطوال أضلاع المثلث

* الدرس الرابع : متباينة المثلث

يرجى عدم حذف العلمية
يسمح فقط بإعادة النشر
لن أن أى تعديل

الوحدة الأولى

الأعداد الحقيقية

مراجعة

تذكر : مجموعات الأعداد :

مجموعة أعداد العد :

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

مجموعة الأعداد الطبيعية :

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

مجموعة الأعداد الصحيحة :

$$\mathbb{Q} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة :

$$\mathbb{N}^+ = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

$$\mathbb{N}^- = \{ -1, -2, -3, \dots \}$$

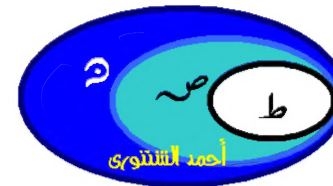
$$\mathbb{Q} = \mathbb{N}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^+$$

مجموعة الأعداد النسبية :

$$\mathbb{R} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

لاحظ : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

و شكل فن المقابل يوضح ذلك



القيمة المطلقة للعدد النسبي :

القيمة المطلقة للعدد الصحيح p هي :المسافة بين موقع العدد (p) و موقع الصفر على خط الأعدادو هي دائماً موجبة ، و يرمز لها بالرمز $|p|$

فمثلاً :

$$|0| = 0, \quad |-0| = 0$$

$$|\frac{5}{3}| = \frac{5}{3}, \quad |-\frac{5}{3}| = -\frac{5}{3}$$

ملاحظة :

$$|s| = 0 \text{ إذا كان } s = 0 \text{ فإن } s = \pm 0$$

الصورة القياسية للعدد النسبي :

يكون العد النسبي في صورته القياسية إذا كان على الصورة :

$$p \times 10^q \text{ حيث } 1 \leq |p| < 10, \quad n \in \mathbb{Z}$$

فمثلاً :

$$102 \dots \dots \dots \times 10^{-5} \text{ هي } 1,02 \times 10^{-5}$$

$$-46 \dots \dots \dots \times 10^{-2} \text{ هي } -4,6 \times 10^{-2}$$

العدد النسبي المربع الكامل :

هو العدد الذي يمكن كتابته على صورة مربع عدد نسبي

أي : (عدد نسبي)²

فمثلاً :

العدد : ٢٥ هو عدد نسبي مربع كامل لأنه يمكن كتابته على

الصورة : $(٣)^٢$ أو $(٣-)^٢$

ومن أمثلة الأعداد النسبية المربعة الكاملة :

١ ، ٤ ، $\frac{٩}{١٦}$ ، $\frac{٢٥}{٣٦}$ ، -٤٦ ، ١,٤٤ ،

العدد النسبي المكعب الكامل :

هو العدد الذي يمكن كتابته على صورة مكعب عدد نسبي

أي : (عدد نسبي)^٣

فمثلاً :

العدد : ٢٧ هو عدد نسبي مكعب كامل لأنه يمكن كتابته على

الصورة : $(٣)^٣$ ،

العدد : -٢٧ هو عدد نسبي مكعب كامل لأنه يمكن كتابته على

الصورة : $(٣-)^٣$ ،

ومن أمثلة الأعداد النسبية المكعبة الكاملة :

١ ، -٨ ، $\frac{٢٧}{١٢٥}$ ، -٠,٦٤ ،

لاحظ الجدول التالي :

| العدد | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ١٠ |
|-------|---|---|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| مربعه | ١ | ٤ | ٩ | ١٦ | ٢٥ | ٣٦ | ٤٩ | ٦٤ | ٨١ | ١٠٠ |
| مكعبه | ١ | ٨ | ٢٧ | ٦٤ | ١٢٥ | ٢١٣ | ٣٤٣ | ٥١٢ | ٧٢٩ | ١٠٠٠ |

الجذر التربيعي للعدد النسبي :

الجذر التربيعي للعدد النسبي الموجب p

هو العدد الذي مربعه يساوي p

و يكون : كل عدد نسبي مربع كامل p له جذران تربيعيان
كل منهما معكوس جمعي للآخر أي أن مجموعهما صفرهما : \sqrt{p} ، $-\sqrt{p}$

فمثلاً :

العدد : ٢٥ له جذران تربيعيان هما : ٥ ، -٥

لأن : $٢٥ = (٥)^٢$ ، $٢٥ = (-٥)^٢$

ملاحظات :

(١) $\sqrt{١٦}$ يعنى الجذر التربيعي الموجب للعدد : ١٦ ، و هو : ٤(٢) $\sqrt{\text{صفر}}$ = صفر

(٣) العدد النسبي السالب ليس له جذر تربيعي

فمثلاً : $(٣-)$ ليس له جذر تربيعي بمعنى أن : $\sqrt{٣-} \notin \mathbb{Q}$ (٤) $\sqrt{٣} = |٣|$ فمثلاً : $\sqrt{٣} = |٣| = \sqrt{٣}$ ، $\sqrt{\frac{٢}{٥}} = |\frac{٢}{٥}| = \sqrt{(\frac{٢}{٥})}$ (٥) المعادلة التربيعية : $\sqrt{p} = \sqrt{p}$ لها حلان هما $\{p, -p\}$ فمثلاً : مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{٩} = \sqrt{٩}$ هي : $\{٣, -٣\}$

(٦) لإيجاد الجذر التربيعي لأي عدد يمكن تحليله إلى عوامله الأولية

، كما يمكن استخدام الآلة الحاسبة

الدرس الأول : الجذر التكعيبي للعدد النسبي

نعلم أن :

حجم المكعب = طول الحرف × نفسه × نفسه = (طول الحرف)^٣
فمثلاً :

حجم المكعب الذي طول حرفه ٣ سم

$$٣ \text{ سم}^3 = ٣ \times ٣ \times ٣ =$$

تعلم :

أما إذا كان : حجم مكعب ٦٤ سم^٣ فإن : إيجاد طول حرفه
نبحث عن عدد إذا ضرب في نفسه ثلاث مرات (أو عدد مكعبه)
نحصل على ٦٤

$$٦٤ = ٤ \times ٤ \times ٤ \text{ : لأن } ٤$$

و بالتالي يكون : طول حرف المكعب الذي حجمه ٦٤ سم^٣

هو : ٤ سم

يسمى العدد : ٤ الجذر التكعيبي للعدد ٦٤

الجذر التكعيبي لعدد نسبي :

الجذر التكعيبي للعدد النسبي p هو العدد الذي مكعبه يساوي p
، يرمز للجذر التكعيبي للعدد النسبي p بالرمز : $\sqrt[3]{p}$

ملاحظات :

(١) الجذر التكعيبي لعدد نسبي موجب يكون موجباً

$$\text{فمثلاً : } ٠ = \sqrt[3]{١٢٥}$$

أحمد الشنتوري

(٢) الجذر التكعيبي لعدد نسبي سالب يكون سالباً

$$\text{فمثلاً : } -٤ = \sqrt[3]{-٦٤}$$

$$(٣) \sqrt[3]{\text{صفر}} = \text{صفر}$$

$$(٤) \sqrt[3]{-٨} = -٢$$

إيجاد الجذر التكعيبي للعدد النسبي المكعب الكامل :

لإيجاد الجذر التكعيبي لأي عدد نسبي يمكن تحليله إلى عوامله الأولية
، كما يمكن استخدام الآلة الحاسبة

فمثلاً :

$$١٠ = ٠ \times ٢ = \sqrt[3]{١٠٠٠}$$

ملاحظات :

(١) العدد النسبي المكعب الكامل :

هو العدد الذي يمكن كتابته على صورة مكعب

عدد نسبي أي : (عدد نسبي)^٣

(٢) العدد النسبي المكعب الكامل له جذر تكعيبي واحد

وهو عدد نسبي أيضاً

(٣) إذا كان : p عدداً مكعباً كاملاً فإن : المعادلة التكعيبية : $\sqrt[3]{p} =$ لها حل واحد فقط في \mathbb{Q} هو : p فمثلاً : مجموعة حل المعادلة : $\sqrt[3]{-٨} =$ في \mathbb{Q} هي :

$$\{ \sqrt[3]{-٨} \} \text{ أي : } \{ -٢ \}$$

أحمد الشنتوري

(١) أكمل الجدول التالي :

| | | | | | |
|-------------------|------------------|------------------|-----------|---|-----------------|
| العدد | ٢٧ | ٨ - | | | ٤ |
| $\sqrt[3]{\quad}$ | | | ٥ - | ٦ | |
| العدد | $\frac{1}{64} -$ | $3\frac{3}{8} -$ | $-.120 -$ | | |
| $\sqrt[3]{\quad}$ | | $-.1$ | | | $\frac{1}{5} -$ |

(٢) أكمل ما يلي :

$$\dots = \sqrt[3]{27} \quad [1]$$

$$4 = \sqrt[3]{\dots} \quad [2]$$

$$\dots = | \sqrt[3]{120} - \sqrt[3]{\dots} | \quad [3]$$

$$\sqrt[3]{\dots} = \sqrt[3]{16} \quad [4]$$

$$\sqrt[3]{\dots} = \sqrt[3]{8} \quad [5]$$

$$\dots = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8} \quad [6]$$

$$\dots = \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{9} \quad [7]$$

$$\dots = \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{64} \quad [8]$$

$$0 = \dots + \sqrt[3]{64} \quad [9]$$

(٣) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

$$\dots = \sqrt[3]{(-8)} \quad [1]$$

(٤ - ، ٢ ، ٤ - ، ٤)

$$\dots = \sqrt[3]{(\frac{1}{8} -)} \quad [2]$$

($\frac{1}{16}$ ، $\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$)

$$\dots = \sqrt[3]{-.120} + \sqrt[3]{3\frac{3}{8}} \quad [3]$$

(٢ - ، ٢ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{3}$)

$$\dots = \sqrt[3]{-.120} \times \sqrt[3]{1\dots} \quad [4]$$

(٢ - ، ٢ ، ١٠ ، $\frac{1}{2}$)

$$\dots = \sqrt[3]{س} \quad [5]$$

($س^2$ ، $س^3$ ، $س^4$ ، $س$)

$$\dots = \sqrt[3]{س} \quad [6] \text{ إذا كان : } س^3 = 64 \text{ فإن : } \sqrt[3]{س} =$$

(٤ - ، ٢ ، ٤ - ، ٤)

(٧) طول حرف المكعب الذي حجمه ٢١٦ سم^٣ يساوي سم

(٨ ، ٦ ، ٤ ، ٢)

(٨) المساحة الجانبية لمكعب حجمه ١٢٥ سم^٣ تساوي سم^٢

(٢٠ ، ٢٥ ، ١٠٠ ، ١٢٥)

أحمد الشنتوري



(٤) أوجد مجموعة حل المعادلات التالية في \mathbb{R} :

| [٢] | [١] |
|-------------------------|---------------------------------------|
| $٢٠ = ٧ - {}^٣س$ | $\frac{٢٧}{٢٤} = {}^٣س = \frac{١}{٣}$ |
| [٤] | [٣] |
| $٦٤ = {}^٣(٢ - س)$ | $٨ = ٧ + {}^٣س$ |
| [٦] | [٥] |
| $٣٠ = ٣ + {}^٣(٢ - س٥)$ | $٨ = {}^٣(س - ١)$ |

أحمد الشنتوري

(٥) كرة حجمها $\pi \frac{٣٢}{٨١}$ وحدة مكعبة أوجد طول قطرها(حجم الكرة $= \frac{٤}{٣} \pi ر^٣$)

(٦) إذا كان نصف مكعب يساوي ٢٥٦ فما هو العدد ؟



الدرس الثاني : مجموعة الأعداد غير النسبية (٥ ')

نعلم أن :

العدد النسبي : هو العدد الذي يمكن وضعه على الصورة $\frac{p}{q}$ حيث :
 $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$.

فمثلاً :

عند حل المعادلة : $4x + 9 = 0$ فإن : $s = \pm \frac{3}{2}$

و يلاحظ أن : كلاً من $\frac{3}{2}$ ، $-\frac{3}{2}$ عدد نسبي

و لكن توجد كثير من الأعداد التي لا يمكن وضعها على الصورة $\frac{p}{q}$
 حيث : $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$.

فمثلاً :

عند حل المعادلة : $x^2 = 2$

فإنه لا يوجد عدد نسبي مربعه يساوي 2 يكون حلاً للمعادلة

العدد النسبي :

هو العدد الذي لا يمكن وضعه على الصورة $\frac{p}{q}$ حيث :
 $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$.

من أمثلة الأعداد غير النسبية :

(١) الجذور التربيعية للأعداد الموجبة التي ليست مربعات كاملة

مثل : $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $-\sqrt{6}$ ،

(٢) الجذور التكعيبية للأعداد التي ليست مكعبات كاملة

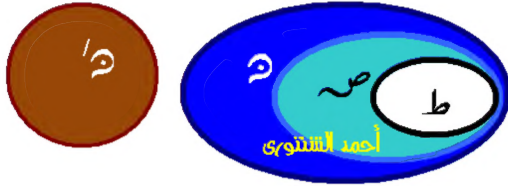
مثل : $\sqrt[3]{2}$ ، $\sqrt[3]{4}$ ، $\sqrt[3]{10}$ ،

أحمد الشنتوي

النسبة التقريبية π (٣)

حيث أنه لا يمكن إيجاد قيمة مضبوطة لأي من هذه الأعداد

مثل هذه الأعداد و غيرها تكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد غير النسبية و يرمز لها بالرمز (٥ ')



ملاحظات :

(١) \mathbb{Q} ، \mathbb{R} منفصلتان أي أن : $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}' = \emptyset$

(٢) مجموعة حل المعادلة في \mathbb{R}' : $x^2 = 2$
 هي $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

(١) أكمل باستخدام أحد الرمز \mathbb{Q} أو \mathbb{R}' :

[٢] $\sqrt{9} \in \dots$ [١] $9 \in \dots$

[٤] $\sqrt{3} \in \dots$ [٣] $3 \in \dots$

[٦] $\text{صفر} \in \dots$ [٥] $\pi \in \dots$

[٨] $\sqrt[3]{8} \in \dots$ [٧] $\sqrt[3]{9} \in \dots$

أحمد الشنتوي

$$[٤] \quad ١ = {}^٣(٢ - س)$$

$$[٥] \quad ٤ = {}^٢(١ - س)$$

$$[٤] \quad \text{أوجد طول ضلع المربع الذي مساحته ٦ سم}^٢$$

(٥) بسبب الريح كسر الجزء العلوي من شجرة طولها ٣ أمتار فصنع مع سطح الأرض زاوية ما ، فإذا كان طول الجزء الثابت فوق الأرض من الشجرة متر واحد أوجد المسافة بين قاعدة الشجرة و نقطة تلاقي قممتها مع الأرض

(٢) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] العدد غير النسبي من بين الأعداد التالية هو

$$(\sqrt{٢} , \sqrt[٣]{٨} , \sqrt[٣]{٤} , \sqrt[٣]{٢})$$

[٢] العدد النسبي من بين الأعداد التالية هو

$$(\sqrt[٣]{٩} , \sqrt[٣]{٢} , \sqrt[٣]{٩} , \sqrt[٣]{٩-٣})$$

[٣] المربع الذي مساحته ١٠ سم^٢ يكون طول ضلعه سم

$$(٠ , ٠ - , \sqrt[٣]{١٠} , -\sqrt[٣]{١٠})$$

[٤] المكعب الذي حجمه ٤ سم^٣ يكون طول حرفه سم

$$(\sqrt[٣]{٤-٣} , \sqrt[٣]{٤} , ٠ , ٠ -)$$

(٣) أوجد قيمة س في كل من مما يلي و بين ما إذا كانت

$$س \supseteq ٥ \text{ أم } س \supseteq ٥'$$

$$[١] \quad ٢٠ = س'$$

$$[٢] \quad ٦ = س''$$

$$[٣] \quad ٢٤ = س''$$



الدرس الثالث : إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبي

تمهيد :

- (١) الأعداد : ١ ، ٤ ، ٩ ، كل منها مربع كامل
و بأخذ الجذر التربيعي لها تكون : ١ ، ٢ ، ٣ ،
ونلاحظ أن : ٢ يقع بين ١ ، ٤ و بالتالي يكون :
 $\sqrt{2}$ يقع بين ١ ، ٢ أى أن : $\sqrt{2} = 1 + \text{كسر عشري}$
 $\sqrt{5}$ يقع بين ٢ ، ٣ أى أن : $\sqrt{5} = 2 + \text{كسر عشري}$ ،
..... و هكذا
(٢) الأعداد : ١ ، ٨ ، ٢٧ ، كل منها مكعب كامل
و بأخذ الجذر التكعيبي لها تكون : ١ ، ٢ ، ٣ ،
ونلاحظ أن : ٣ يقع بين ١ ، ٨ و بالتالي يكون :
 $\sqrt[3]{3}$ يقع بين ١ ، ٢ أى أن : $\sqrt[3]{3} = 1 + \text{كسر عشري}$
 $\sqrt[3]{10}$ يقع بين ٢ ، ٣ أى أن : $\sqrt[3]{10} = 2 + \text{كسر عشري}$ ،
..... و هكذا

(١) أكمل ما يلى بعددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد :

- [١] $\sqrt{12}$ العددين هما : ،
[٢] $\sqrt{29}$ العددين هما : ،
[٣] $\sqrt[3]{9}$ العددين هما : ،
[٤] $\sqrt[3]{10}$ العددين هما : ،

أحمد الشنتوي

إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبي :

تستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبي

فمثلاً : نجد : $\sqrt{2} = 1.4142....$ ، و هكذا

ويمكن إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبي دون استخدام الآلة الحاسبة

فمثلاً : يمكن إيجاد تقريبية للعدد : $\sqrt{2}$ كما يلى :

نلاحظ أن : ٢ ينحصر بين العددين ١ ، ٤ (كل منهما مربع كامل)

أى أن : $1 < \sqrt{2} < 2$ بأخذ الجذر التربيعي للأطراف∴ $1 < \sqrt{2} < 2$ أى أن : $\sqrt{2} = 1 + \text{كسر عشري}$

و بفحص قيم الأعداد : (١,١) ، (١,٢) ، (١,٣) ، (١,٤)

، (١,٥) نجد : (١,١) = ١,٢١ ،

، (١,٢) = ١,٤٤ ، (١,٣) = ١,٦٩ ،

، (١,٤) = ١,٩٦ ، (١,٥) = ٢,٢٥

، ∴ $1.96 < 2 < 2.25$ و بأخذ الجذر التربيعي∴ $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$ ∴ ينحصر بين ١,٤ ، ١,٥∴ $\sqrt{2} = 1.4$ لأقرب جزء من عشرة

و لإيجاد قيمة تقريبية أدق لرقمين عشريين نلاحظ أن :

 $\sqrt{2} = 1.4 + \text{كسر عشري}$ ، و نجد :

، (١,٤١) = ١,٩٨٨١ ، (١,٤٢) = ٢,٠١٦٤

∴ $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ ∴ ينحصر بين ١,٤١ ، ١,٤٢∴ $\sqrt{2} = 1.41$ لأقرب جزء من مائة ، و هكذا

أحمد الشنتوي

أحمد الشنتوي

و يمكن استخدام الآلة الحاسبة للتأكد من صحة الإجابة

(٢) [١] أوجد لأقرب جزء من عشرة قيمة $\sqrt{5}$

[٢] أوجد لأقرب جزء من مائة قيمة $\sqrt{11}$

[٣] أوجد لأقرب جزء من عشرة قيمة $\sqrt[3]{2}$

(٣) أوجد قيمة s في كل مما يلي حيث $s \in \mathbb{R}^+$:

[١] $s > \sqrt{7} > s + 1$ ، $s = \dots$

[٢] $s > \sqrt{21} > s + 1$ ، $s = \dots$

[٣] $s > \sqrt{80} > s + 1$ ، $s = \dots$

[٤] $s > \sqrt[3]{5} > s + 1$ ، $s = \dots$

[٥] $s > \sqrt[3]{30} > s + 1$ ، $s = \dots$

[٦] $s > \sqrt[3]{100} > s + 1$ ، $s = \dots$

(٤) أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] العدد غير النسبي المحصور بين ٢ ، ٣ هو

($\sqrt{10}$ ، $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{3}$ ، ٠,٢)

[٢] العدد غير النسبي المحصور بين -٢ ، -١ هو

($-\sqrt{3}$ ، -١,٥ ، -٣ ، $-\sqrt{2}$)

[٣] $\sqrt{10} = \dots$

($3,2 -$ ، ٢,٩٩ ، ٣ ، ٣,١٧)

[٤] أقرب عدد صحيح للعدد $\sqrt[3]{20}$ هو

(٠ ، ٤ ، ٣ ، ٢)

أحمد الشنتوري

ملاحظات :

$$(1) \sqrt[3]{s} = \sqrt[3]{s} \times \sqrt[3]{s} \times \sqrt[3]{s} = s \quad \text{حيث : } s < 0$$

$$\text{فمثلاً : } \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3} , \quad \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}$$

$$, \quad 0 = \sqrt[3]{0} \times \sqrt[3]{0} \times \sqrt[3]{0} , \quad \text{وهكذا}$$

$$(2) \sqrt[3]{s} = \sqrt[3]{s} \times \sqrt[3]{s} \times \sqrt[3]{s} = s \quad \text{حيث : } s > 0$$

$$\text{فمثلاً : } \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{8} , \quad \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}$$

$$, \quad 0 = \sqrt[3]{0} \times \sqrt[3]{0} \times \sqrt[3]{0} , \quad \text{وهكذا}$$

(٣) كل عدد غير نسبي تقع قيمته بين عددين نسبيين

فمثلاً : لأثبت أن :

$$[1] \sqrt[3]{3} \text{ ينحصر بين } 1,7 \text{ ، } 1,8 \text{ نتبع ما يلي :}$$

$$\therefore \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3} = (\sqrt[3]{3})^3$$

$$, \quad \sqrt[3]{2,89} = (\sqrt[3]{2,89})^3 , \quad \sqrt[3]{3,24} = (\sqrt[3]{3,24})^3$$

$$, \quad \therefore \sqrt[3]{3,24} > \sqrt[3]{3} > \sqrt[3]{2,89} \text{ و بأخذ الجذر التربيعي}$$

$$\therefore 1,8 > \sqrt[3]{3} > 1,7$$

$$\text{أي أن : } \sqrt[3]{3} \text{ ينحصر بين } 1,7 \text{ ، } 1,8$$

$$[2] \sqrt[3]{10} \text{ ينحصر بين } 2,4 \text{ ، } 2,5 \text{ نتبع ما يلي :}$$

$$\therefore \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{10} = (\sqrt[3]{10})^3$$

$$, \quad \sqrt[3]{13,824} = (\sqrt[3]{13,824})^3 , \quad \sqrt[3]{10,625} = (\sqrt[3]{10,625})^3$$

$$, \quad \therefore \sqrt[3]{13,824} > \sqrt[3]{10} > \sqrt[3]{10,625} \text{ و بأخذ الجذر التكعيبي}$$

$$\therefore 2,4 > \sqrt[3]{10} > 2,5$$

$$\text{أي أن : } \sqrt[3]{10} \text{ ينحصر بين } 2,4 \text{ ، } 2,5$$

(٥) أثبت أن :

$$[1] \sqrt[3]{5} \text{ ينحصر بين } 2,23 \text{ ، } 2,24$$

$$[2] \sqrt[3]{11} \text{ ينحصر بين } 2,22 \text{ ، } 2,23$$

أحمد الشنتوري

يمكن بنفس فتحة الفرجار تحديد نقطة $\sqrt{0}$ التي تمثل العدد $\sqrt{0}$ حيث $\sqrt{0}$ تقع على يسار النقطة و

ملاحظات :

- (١) كل عدد غير نسبي يمكن تمثيله بنقطة على خط الأعداد
(٢) لتمثيل العدد : $\sqrt{0} + 1$ نتبع نفس الخطوات السابقة ، لكن نركز سن الفرجار في النقطة التي تمثل العدد ١ ، و هكذا

(٦) [١] ارسم خط الأعداد و حدد النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{3}$

[٢] ارسم خط الأعداد و حدد النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{7}$

تمثيل العدد غير النسبي (على الصورة \sqrt{s}) على خط الأعداد :

توجد عدة طرق لتمثيل العدد غير النسبي على الصورة \sqrt{s} منها الطريقة التالية :

تعتمد هذه الطريقة على رسم مثلث قائم الزاوية بحيث يكون \sqrt{s} طول أحد ضلعي القائمة ويكون : طول الوتر = $\frac{1}{r} (s + 1)$ ، طول الضلع الآخر للقائمة = $\frac{1}{r} (s - 1)$ ،

فمثلاً : لتمثيل العدد $\sqrt{0}$

(١) نوجد : طول الوتر = $\frac{1}{r} (0 + 1) = 1$ ،

طول الضلع الآخر للقائمة = $\frac{1}{r} (0 - 1) = -1$ ،

(٢) نرسم خط الأعداد ،

و من نقطة (و) نقيم عمود طوله ٢ وحدة طول

يصل لنقطة م

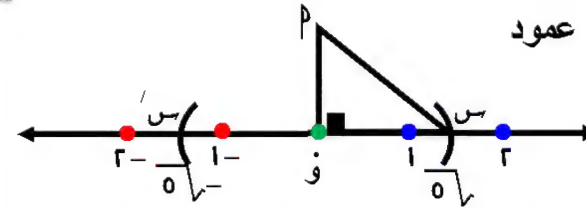
(٣) نركز بسن الفرجار

عند نقطة م و بفتحة طولها ٣ وحدة طول نرسم قوساً يقطع خط الأعداد س على يمين نقطة (و) فيكون :

$$(و س) = (م س) - (م و) = (٣ س) - (٢ و) = (٣) - (٢) = ١$$

∴ و س = $\sqrt{0}$ وحدة طول

و تكون نقطة س هي التي تمثل العدد $\sqrt{0}$



[٣] ارسم خط الأعداد و حدد النقطة التي تمثل العدد $1 - \sqrt{6}$

(٨) أوجد كلاً من طول ضلع و طول قطر مربع مساحته ١٠ سم^٢

[٤] ارسم خط الأعداد و حدد النقطة التي تمثل العدد $1 + \sqrt{5}$

(٧) ارسم Δ ب د القائم الزاوية في ب ، و الذي فيه $\angle ب = ٢$ سم ،
ب د = ٣ سم و استخدم الشكل في تحديد النقطة التي تمثل العدد
 $\sqrt{13}$ على خط الأعداد

(٩) دائرة محيطها $2\sqrt{5} \pi$ سم أوجد مساحة سطحها

الدرس الرابع : مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R}

مجموعة الأعداد الحقيقية :

هي المجموعة الناتجة من اتحاد مجموعة الأعداد النسبية و مجموعة الأعداد غير النسبية ويرمز لها بالرمز \mathbb{R}

أي أن : $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$
كما بالشكل المقابل



و شكل فن المقابل يوضح :

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

(٢) أي عدد طبيعي أو صحيح

أو نسبي أو غير نسبي
هو عدد حقيقي أي أن :

$$\mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$$

(٣) كل عدد حقيقي تمثله نقطة واحدة على خط الأعداد



و يلاحظ :

(١) العدد صفر تمثله نقطة الأصل و

(٢) الأعداد الحقيقية الموجبة تمثلها جميع نقط خط الأعداد على يمين و

(٣) الأعداد الحقيقية الموجبة تمثلها جميع نقط خط الأعداد على يمين و

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

$$[5] \mathbb{R}_+ = \{x : x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$$

$$[6] \mathbb{R}_- = \{x : x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$$

$$[7] \text{مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة} = \mathbb{R}_- \cup \{0\}$$

$$= \{x : x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$$

$$[8] \text{مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

$$= \{x : x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$$

$$[9] \sqrt[3]{1-x} = 1-x \text{ لأن : } 1-x = (1-x) \times (1-x) \times (1-x)$$

بينما $\sqrt{1-x} \notin \mathbb{R}$ لأنه لا يوجد عدد حقيقي إذا ضرب في نفسه كان الناتج - ١

[٩] يرمز للأعداد الحقيقية بدون الصفر بالرمز \mathbb{R}^*

$$\text{أي أن : } \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$$

(١) أكمل ما يلي :

$$[1] \mathbb{R} \cup \mathbb{Q}' = \dots$$

$$[2] \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}' = \dots$$

$$[3] \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \dots$$

$$[4] \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \dots$$

$$[5] \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \dots$$

$$[6] \mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \dots$$

(٢) أكمل الجدول التالي بوضع علامة (✓) في المكان المناسب كما في الحالة الأولى :

| العدد | عدد طبيعي | عدد صحيح | عدد نسبي | عدد غير نسبي | عدد حقيقي |
|----------------|-----------|----------|----------|--------------|-----------|
| 0 | ✓ | ✓ | ✓ | x | ✓ |
| $-\frac{1}{2}$ | | | | | |
| $\sqrt{2}$ | | | | | |
| $ -7 $ | | | | | |
| $\sqrt[3]{4}$ | | | | | |
| 1,3 | | | | | |
| $-\sqrt[3]{3}$ | | | | | |
| $\sqrt{9}$ | | | | | |
| $\sqrt[3]{-8}$ | | | | | |

أحمد الشنتوري

(٣) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[1] $\mathbb{C} = \dots$

($\mathbb{Q} \cup \mathbb{P}$ ، $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R}$ ، $\mathbb{Q} \cup \mathbb{C}$ ، $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$)

[2] $\{s : s \in \mathbb{C}, s > 0\} = \dots$

(\mathbb{R} ، \mathbb{Q} ، \mathbb{C} ، \mathbb{I})

[3] إذا كان : s عدداً حقيقياً سالباً فالعدد الذي يمثل عدداً موجباً من الأعداد التالية

(s^3 ، s^2 ، s ، $\frac{1}{s}$)

[4] إذا كان : $\frac{1}{p}$ ، $\frac{p}{5}$ عددين حقيقيين بين صفر ، 1

فإن : $p = \dots$

(-2 ، 1 ، $\sqrt{5}$ ، 2)

(٤) ضع الأعداد التالية في

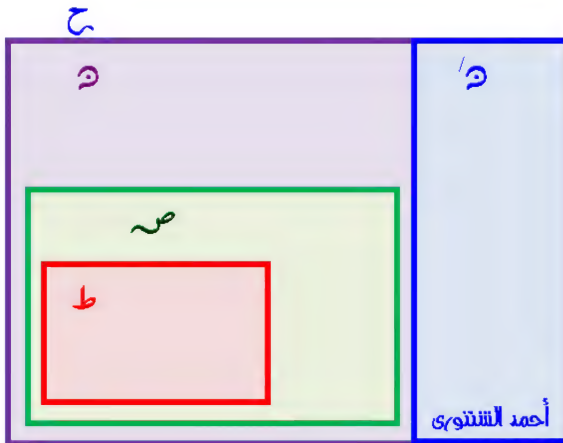
أماكنها المناسبة في شكل فن المقابل

-2 ، $\sqrt{2}$ ، π

$0,2$ ، $\sqrt[3]{-1}$ ، $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

$\sqrt[3]{14}$ ، 3 ، صفر ،

صفر ، $\sqrt[3]{14}$ ، 3 ، صفر ،



أحمد الشنتوري

الدرس الخامس : علاقة الترتيب في ح

إذا كانت : m ، n نقطتان تنتميان للمستقيم l فإنه وفق اتجاه السهم بالشكل المقابل يكون :
 m تلي n أي تكون على يمينها ،

m تسبق n أي تكون على يسارها
 و هكذا بالنسبة لجميع نقاط الخط المستقيم ، فإذا علمنا أن كل نقطة من
 نقط الخط المستقيم تمثل عدداً حقيقياً فإننا نقول أن :
 مجموعة الأعداد الحقيقية مجموعة مرتبة

خواص الترتيب :

| | | |
|---|-----------------------|----------------------|
| ١ إذا كان : m ، n عددين حقيقيين يمثلهما على خط الأعداد النقطتان m ، n على الترتيب فإن : | | |
| ١ m تنطبق على n | ٢ m تسبق n | ٣ m تلي n |
| | | |
| $m = n$ | $m < n$ | $m < n$ |

| | | |
|---|-------------------------------|-------------------------------|
| ٢ إذا كان : m عدداً حقيقياً تمثله على خط الأعداد النقطة m ، و هي نقطة الأصل التي تمثل العدد صفر فإن : | | |
| ١ m تنطبق على n | ٢ m تقع على يمين n | ٣ m تقع على يسار n |
| | | |
| $m = n$ | $m > n$ | $m < n$ |

فمثلاً :

لترتيب الأعداد : $\sqrt{9}$ ، 3 ، $\sqrt{11}$ ، $\sqrt{8}-3$ نتبع ما يلي :

$$\sqrt{9} = 3 \quad , \quad \sqrt{8}-3 = 2-3 = -1$$

و يكون الترتيب التصاعدي من الأصغر إلى الأكبر هو :

$$\sqrt{8}-3 \quad , \quad \sqrt{9} \quad , \quad \sqrt{11} \quad , \quad 3$$

أي :

$$\sqrt{8}-3 \quad , \quad 3 \quad , \quad \sqrt{11} \quad , \quad \sqrt{9}$$

(١) رتب الأعداد تصاعدياً :

$$\sqrt[3]{1-}, \sqrt[3]{27}, 1, \sqrt[3]{20}, -\sqrt[3]{20}$$

(٣) ضع العلامة المناسبة (> , = , <) :

$$\sqrt[3]{8} \dots \sqrt[3]{2} \quad [1] \quad \sqrt[3]{7} \dots 2$$

$$\sqrt[3]{0} \dots \sqrt[3]{2} + 1 \quad [4] \quad 3 - \dots \sqrt[3]{24} \quad [3]$$

$$1 - \sqrt[3]{2} \dots \sqrt[3]{2} - 1 \quad [6] \quad \sqrt[3]{0} - 3 \dots \sqrt[3]{1-} \quad [5]$$

(٤) إذا كانت : $s \in \mathbb{R}$ فاذكر ما إذا كانت s موجبة أم سالبة
في كل من الحالات التالية :

$$[1] \quad s < 0 \quad [2] \quad s > 0$$

$$[3] \quad s < |4 -| \quad [4] \quad 2 - > s > 0$$

$$[5] \quad |0 -| > s > 7 \quad [6] \quad |1 -| > s > |7 -|$$

(٥) أكتب عدد نسبي و أربعة أعداد غير نسبية تنحصر بين 0 ، 7

(٢) رتب الأعداد تنازلياً :

$$\sqrt[3]{27-}, \sqrt[3]{8}, -\sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{10}, -\sqrt[3]{11}$$

(٦) بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن : $\sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{3}$

الدرس السادس : الفترات

تمهيد :

نعلم أن : يمكن التعبير عن المجموعة :

 $S =$ مجموعة الأعداد الصحيحة الأكبر من -1 والأقل من 0

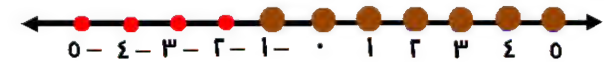
بطريقة الصفة المميزة كما يلي :

 $S = \{ p : p \in \mathbb{Z}, -1 < p < 0 \}$

، بطريقة السرد كما يلي :

 $S = \{ -1, -2, -3, -4, -5, \dots \}$

، تمثل على خط الأعداد كما بالشكل :

لاحظ أن : عناصر المجموعة S تمثل بنقط منفصلة
أما المجموعة : $E =$ مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من -1 والأقل من 0

فيمكن التعبير عنها بطريقة الصفة المميزة كما يلي :

 $E = \{ p : p \in \mathbb{R}, -1 < p < 0 \}$

و لكن لا يمكن التعبير عنها بطريقة السرد لأنه يوجد بين كل عددين حقيقيين عدد لا نهائي من الأعداد الحقيقية بعضها أعداد نسبية و

البعض الآخر أعداد غير نسبية

و بالتالي لا يمكن تمثيلها على خط الأعداد كما سبق

لاحظ أن : عناصر المجموعة E يجب أن تمثل بنقط متصلةلذا تستخدم طريقة أخرى للتعبير عن المجموعة E تسمى الفترة :

الفترة :

هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

أحمد الشنتوي

أولاً : الفترات المحدودة

إذا كان : $p, b \in \mathbb{R}, p < b$ فإننا نعرف كلاً من :(١) الفترة المغلقة $[p, b]$ $[p, b] = \{ s : s \in \mathbb{R}, p \leq s \leq b \}$ عناصرها p, b و جميع الأعداد الحقيقية بينهماتوضع دائرة مظللة عند كل من النقطتين الممثلتين للعددين p, b و تظل المنطقة بينهما على خط الأعدادو يلاحظ : $p \in [p, b], b \in [p, b]$ (٢) الفترة المفتوحة (p, b) $(p, b) = \{ s : s \in \mathbb{R}, p < s < b \}$ عناصرها جميع الأعداد الحقيقية المحصورة بين p, b توضع دائرة مفتوحة عند كل من النقطتين الممثلتين للعددين p, b و تظل المنطقة بينهما على خط الأعدادو يلاحظ : $p \notin (p, b), b \notin (p, b)$ (٣) الفترة نصف المفتوحة (أو نصف المغلقة) $[p, b)$ $[p, b) = \{ s : s \in \mathbb{R}, p \leq s < b \}$ عناصرها العدد p ، وجميع الأعداد الحقيقية المحصورة بين p, b توضع دائرة مغلقة عند النقطة الممثلة للعدد p ، و دائرة مفتوحة عند النقطة الممثلة للعدد b و تظل المنطقة بينهما على خط الأعدادو يلاحظ : $p \in [p, b), b \notin [p, b)$

أحمد الشنتوي

(٢) أكتب المجموعات التالية على صورة فترة و مثلها على خط الأعداد :

$$[1] \quad \{s : s \in \mathbb{R}, -4 \leq s \leq 4\} = \sim$$

$$[2] \quad \{s : s \in \mathbb{R}, 0 \leq s < 1\} = \sim$$

(٣) ضع الرمز المناسب \in أو \notin أو \supset أو $\not\supset$:

$$[1] \quad \sqrt{2} \dots [1, 2]$$

$$[2] \quad \sqrt[3]{3} \dots [1, 2-]$$

$$[3] \quad 4 \dots [4, 4-]$$

$$[4] \quad 0- \dots [3, 0-]$$

$$[5] \quad |0-| \dots [4, 6]$$

$$[6] \quad \{7, 2\} \dots [7, 2]$$

$$[7] \quad \{7, 2\} \dots]7, 2[$$

$$[8] \quad [0, 2[\dots [0, 3]$$

$$[9] \quad [2, 1] \dots [3, 3-]$$

$$[2] \quad [p, b] = \{s : s \in \mathbb{R}, p < s \leq b\}$$

عناصرها العدد b ، وجميع الأعداد الحقيقية المحصورة بين p ، b .
توضع دائرة مفتوحة عند النقطة الممثلة للعدد p ، و دائرة مغلقة عند النقطة الممثلة للعدد b و تظل المنطقة بينهما على خط الأعداد و يلاحظ : $p \notin [p, b]$ ، $b \in [p, b]$

فمثلاً :

(١) الفترة $[-2, 3]$ تكتب بطريقة الصفة المميزة كما يلي :

$$[-2, 3] = \{s : s \in \mathbb{R}, -2 \leq s \leq 3\}$$

و تمثل على خط الأعداد كما بالشكل المقابل

$$[2] \quad \{s : s \in \mathbb{R}, 1 < s \leq 6\} = \sim$$

تكتب على صورة كما يلي : $\sim = [1, 6]$

و تمثل على خط الأعداد كما بالشكل المقابل

(١) أكتب الفترات التالية بطريقة الصفة المميزة و مثلها على خط الأعداد :

$$[1] \quad [-3, 4]$$

$$[2] \quad [2, 7]$$

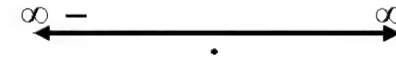
ثانياً : الفترات غير المحدودة

نعلم أن خط الأعداد مهما أمتد من جهتيه فإنه يوجد أعداد حقيقية موجبة من جهة اليمين و أعداد سالبة من جهة اليسار تقع على هذا الخط لذا فإنه :

١] الرمز ∞ يقرأ (لانهاية) و يعنى أنه أكبر من أى عدد حقيقى يمكن تصويره ، $\infty \notin \mathbb{R}$

٢] الرمز $-\infty$ يقرأ (سالب لانهاية) و يعنى أنه أصغر من أى عدد حقيقى يمكن تصويره ، $-\infty \notin \mathbb{R}$

٣] الرمز ∞ ، $-\infty$ لا توجد نقط تمثلهما على خط الأعداد الحقيقية ، و هما امتداد لخط الأعداد من جهتيه



و إذا كان : $p \in \mathbb{R}$ فإننا نعرف كلاً من :

$$[p, \infty) = \{s : s \in \mathbb{R}, s \geq p\} \quad (1)$$

و هى تعبر عن العدد p
و جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من p
و يلاحظ أن : $p \in [p, \infty)$

$$[p, \infty) = \{s : s \in \mathbb{R}, s \geq p\} \quad (2)$$

و هى تعبر عن جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من p
و يلاحظ أن : $p \notin (p, \infty)$



$$[p, \infty) = \{s : s \in \mathbb{R}, s \geq p\} \quad (3)$$

و هى تعبر عن العدد p
و جميع الأعداد الحقيقية الأصغر من p
و يلاحظ أن : $p \in [p, \infty)$

$$[p, \infty) = \{s : s \in \mathbb{R}, s \geq p\} \quad (4)$$

و هى تعبر عن جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من p
و يلاحظ أن : $p \notin (p, \infty)$



ملاحظات :

$$(1) \text{ مجموعة الأعداد الحقيقية } \mathbb{R} =]-\infty, \infty[$$

$$(2) \text{ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة } \mathbb{R}_+ =]0, \infty[$$

$$(3) \text{ مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة } \mathbb{R}_- =]-\infty, 0[$$

$$(4) \text{ مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة } =]0, \infty[$$

$$(5) \text{ مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة } =]-\infty, 0[$$

(٤) أكتب الفترات التالية بطريقة الصفة المميزة و مثلها على خط الأعداد :

$$[1, \infty)$$

$$[2, \infty)$$

(٥) أكتب المجموعات التالية على صورة فترة و مثلها على خط الأعداد :

$$[1] \quad S = \{s : s \in \mathbb{R}, s \leq 4\}$$

$$[2] \quad S = \{s : s \in \mathbb{R}, s > 1\}$$

(٦) ضع الرمز المناسب \in أو \notin أو \supset أو $\not\supset$:

$$[1] \quad 3 \in \dots [4, \infty)$$

$$[2] \quad 4 \in \dots [4, \infty)$$

$$[3] \quad 4 \in \dots [4, \infty)$$

$$[4] \quad 0 \in \dots [0, \infty)$$

$$[5] \quad 0 \in \dots [0, \infty)$$

$$[6] \quad [3, 0] \in \dots [4, \infty)$$

$$[7] \quad [1, 3] \in \dots [0, 2]$$

$$[8] \quad [1, 2] \in \dots [1, \infty)$$

$$[9] \quad [1, 2] \in \dots [1, \infty)$$

العمليات على الفترات :

تذكر :

العمليات على المجموعات :

(١) تقاطع مجموعتين :

هو مجموعة جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين

(٢) اتحاد مجموعتين :

هو مجموعة تحوي جميع العناصر الموجودة في المجموعتين أو كليهما

(٣) مجموعة الفرق بين المجموعتين S ، V :

هي مجموعة العناصر التي تنتمي للمجموعة S ولا تنتمي للمجموعة V ويرمز لها بالرمز $S - V$

(٤) مكمل المجموعة S بالنسبة للمجموعة S :

هي مجموعة العناصر التي تنتمي للمجموعة S ولا تنتمي للمجموعة S ويرمز لها بالرمز S'

فمثلاً :

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$$

$$S = \{1, 2, 3\}, V = \{2, 3, 5\} \text{ فإن :}$$

$$[1] \quad S \cap V = \{3\}$$

$$[2] \quad S \cup V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$[3] \quad S - V = \{1, 4\}$$

$$[4] \quad V - S = \{2, 5\}$$

$$[5] \quad S' = \{5, 6\}$$

$$[6] \quad V' = \{1, 4, 6\}$$

العمليات على الفترات :

حيث أن الفترات هي مجموعات جزئية من الأعداد الحقيقية فإنه يمكن إجراء عمليات التقاطع و الاتحاد و الفرق و المكملية عليها
فمثلاً :

(١) إذا كانت : $\text{س} = [٤, ١ -]$ ، $\text{ص} = [١, ٣ -]$ فإن :

$$\text{س} \cap \text{ص} = [١, ١ -] = \text{ص}$$

$$\text{س} \cup \text{ص} = [٤, ٣ -] = \text{ص}$$

$$\text{س} - \text{ص} = [٤, ١ [$$

$$\text{ص} - \text{س} = [١ - , ٣ -]$$

(٢) إذا كانت : $\text{س} = [٨, ١ -]$ فإن :

$$\text{س}' = [١ - , ٨ -]$$

(٣) إذا كانت : $\text{س} = [٥, ٢]$ ، $\text{ص} = [١, ٣ -]$ فإن :

$$\text{س} \cap \text{ص} = \emptyset$$

لاحظ أن :

س ، ص متباعدتان

(٧) إذا كانت : $\text{س} = [٣, ٢ -]$ ، $\text{ص} = [٠, ٤ -]$

أوجد مستعيناً بخط الأعداد كلاً من :

[١] $\text{س} \cap \text{ص} = \dots$

[٢] $\text{س} \cup \text{ص} = \dots$

[٣] $\text{س} - \text{ص} = \dots$

[٤] $\text{ص} - \text{س} = \dots$

(٨) إذا كانت : $\text{س} = [٣, ٨ -]$ ، $\text{ص} = [٨, ٤ -]$

أوجد مستعيناً بخط الأعداد كلاً من :

[١] $\text{س} \cap \text{ص} = \dots$

[٢] $\text{س} \cup \text{ص} = \dots$

[٣] $\text{س}' = \dots$

[٤] $\text{ص}' = \dots$

(٩) أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

$$[1] \dots = \{3\} - [0, 3]$$

$$([0, 3], [0, 3], [0, 3], [0, 3])$$

$$[2] \dots = \{0, 3\} - [0, 3]$$

$$([0, 3], [0, 3], [0, 3], [0, 3])$$

$$[3] \dots =]0, 3[- [0, 3]$$

$$(\{0, 3\}, \{3\}, [0, 3], \emptyset)$$

$$[4] \dots = [4, 1] \cup]1, 1 - [$$

$$(\emptyset, [4, 1 - [, [4, 1 - [,]4, 1 - [)$$

$$[5] \dots = [4, 2[\cap]1, 1 - [$$

$$(\emptyset,]2, 1 - [, [4, 1 - [,]2, 1 - [)$$

$$[6] \dots =]1, 4 - [\cap]1, 4 - [$$

$$(\emptyset, [1, 0[, [4, 1 - [,]1, 4 - [)$$

[٧] إذا كانت : $s = [3, \infty[$ فإن : $s' =$

$$([3, \infty[, [3, \infty[,]3, \infty[,]3, \infty[)$$

[٨] إذا كانت : $s = [7, 2] \cap [4, 3]$ فإن : $s =$

$$([4, 3], [7, 2], [7, 2], [4, 3])$$

[٩] مجموع الأعداد الحقيقية في $[10, 10 - [$ هو

$$(-10, 10, 20, \text{صفر})$$

(١٠) أكمل ما يلي :

$$[1] \text{ إذا كانت : } s \in [1, 9] \text{ فإن : } \sqrt{s} \in \dots$$

$$[2] \text{ إذا كانت : } s \in [-2, 3] \text{ فإن : } s' \in \dots$$

$$[3] \text{ إذا كانت : } s' \in [0, 4] \text{ فإن : } s^3 \in \dots$$

$$[4] \text{ إذا كان : } s \in]1, 4[\text{ وكان : } s < s' \text{ فإن : } s \in \dots$$

$$[5] \text{ إذا كانت : } s + 2 \in [1, 4] \text{ فإن : } 2s \in \dots$$

$$[11] \text{ إذا كان : } s \cap s' = [4, 7], s \cup s' = [3, 7]$$

$$s \supset s' \text{ فأوجد : } s, s', s - s'$$

$$[12] \text{ إذا كان : } s \cap s' = [2, 4], s \cup s' = [1, 6]$$

$$s - s' = [4, 6] \text{ فأوجد : } s, s'$$

الدرس السابع : العمليات على الأعداد الحقيقية

أولاً : جمع الأعداد الحقيقية :

تمهيد : نعلم أن :

(١) ٣ س ، ٤ س حدان جبريان متشابهان

مجموعهما هو حد جبري مشابه لهما

أي : ٣ س + ٤ س = (٣ + ٤) س = ٧ س

بالمثل يمكن استنتاج أن :

$$\sqrt{7} = \sqrt{3 + 4} = \sqrt{3} + \sqrt{4}$$

لاحظ أن :

العدد الحقيقي $\sqrt{3}$ ينتج من حاصل ضرب العدد النسبي ٣في العدد غير النسبي $\sqrt{3}$

(٢) ٣ س ، ٤ ص حدان جبريان غير متشابهين

مجموعهما هو مقدار جبري أبسط صورة له هي : ٣ س + ٤ ص

بالمثل : العددين الحقيقيين $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{4}$ مجموعهما هوعد حقيقي أبسط صورة له هي : $\sqrt{3} + \sqrt{4}$

(١) أوجد ناتج :

$$[1] \quad \dots = \sqrt{0} + \sqrt{0} 4 - \sqrt{0} 3$$

$$[2] \quad \dots = \sqrt{3} 2 - \sqrt{2} 0 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

خواص جمع الأعداد الحقيقية :

[١] الانغلاق :

إذا كان : ٣ ، ٤ ب ، ٣ ح يكون : (٣ + ٤) ح

أي أن : مجموع أي عددين حقيقيين هو عدد حقيقي

وبالتالي : ح مغلقة تحت عملية الجمع

فمثلاً :

ناتج جمع كل من ٣ + ٤ ، $\sqrt{3} + \sqrt{4}$ هو عدد حقيقي

[٢] الإبدال :

إذا كان : ٣ ، ٤ ب ، ٣ ح فإن : ٣ + ٤ = ٤ + ٣

أي أن : عملية الجمع إبدالية في ح

فمثلاً :

$$7 + \sqrt{3} = \sqrt{3} + 7$$

[٣] الدمج :

إذا كان : ٣ ، ٤ ب ، ٣ ح يكون :

$$(3 + 4) + 3 = (3 + 4) + 3 = 3 + (4 + 3)$$

فمثلاً :

$$\text{الدمج} \quad (4 + \sqrt{3}) + 3 = 4 + (\sqrt{3} + 3)$$

$$\text{الإبدال} \quad (\sqrt{3} + 4) + 3 =$$

$$\text{الدمج} \quad \sqrt{3} + (4 + 3) =$$

$$\sqrt{3} + 7 =$$

[٤] العنصر المحايد الجمعي :

الصفر هو المحايد الجمعي في ح لأن : ٣ = ٣ + ٠ = ٠ + ٣

فمثلاً :

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3} + 0 = 0 + \sqrt[3]{3}$$

[٥] وجود معكوس جمعي لكل عد حقيقي :

لكل $p \in \mathbb{R}$ يوجد $(-p) \in \mathbb{R}$ حيث :
 $p + (-p) = 0$ (صفر) (المحايد الجمعي)

فمثلاً :

المعكوس الجمعي للعدد $\sqrt[3]{3}$ هو : $-\sqrt[3]{3}$ و العكس صحيح

$$0 = (\sqrt[3]{3} -) + \sqrt[3]{3}$$

ملاحظات :

(١) المعكوس الجمعي للعدد : $3 + \sqrt{2}$ هو :

$$-(3 + \sqrt{2}) = -3 - \sqrt{2}$$

(٢) المعكوس الجمعي للعدد : $3 - \sqrt{2}$ هو :

$$-(3 - \sqrt{2}) = -3 + \sqrt{2}$$

(٣) المعكوس الجمعي للعدد صفر هو نفسه

ثانياً : طرح الأعداد الحقيقية :

حيث أن لكل عدد حقيقي معكوس جمعي فإن عملية الطرح ممكنة دائماً
 في \mathbb{R} و تعرف كما يلي :

لكل $p, b \in \mathbb{R}$ يكون : $b - p = b + (-p)$ أي أن :
 عملية الطرح $(b - p)$ تعني جمع p مع المعكوس الجمعي للعدد b
 و يلاحظ أن :

عملية الطرح في \mathbb{R} ليست إبدالية و ليست دمجية

(٢) أكمل ما يلي :

$$[1] \quad \dots = \sqrt{7} + \sqrt{7}$$

$$[2] \quad \dots + 4 = 4 + \sqrt{3}$$

$$[3] \quad \dots = (\sqrt{0} -) + \sqrt{0}$$

$$[4] \quad (\sqrt{11} + \dots) + 4 = \sqrt{11} + 6$$

$$[5] \quad \dots = \sqrt[3]{9} 4 - \sqrt[3]{9} 8$$

$$[6] \quad \dots = \sqrt[3]{2} 2 + \sqrt[3]{2} 3 - \sqrt[3]{2} 3 - \sqrt[3]{2} 3$$

$$[7] \quad \dots = \sqrt[3]{6} \frac{2}{3} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{6} \frac{1}{3}$$

$$[8] \quad \dots \text{ المعكوس الجمعي للعدد : } \sqrt[3]{8} - \text{ هو } \dots$$

$$[9] \quad \dots \text{ المعكوس الجمعي للعدد : } 1 - \sqrt{2} \text{ هو } \dots$$

$$[10] \quad \dots \text{ المعكوس الجمعي للصفر هو } \dots$$

$$[11] \quad \dots \text{ العدد المحايد الجمعي في } \mathbb{R} \text{ هو } \dots$$

أحمد الشنتوري

ثالثاً : ضرب الأعداد الحقيقية :

تمهيد : نعلم أن :

$$(1) \quad 3 \times 4 = 12 \quad (4 \times 3) = 12$$

بالمثل يمكن استنتاج أن :

$$\sqrt{12} = \sqrt{(4 \times 3)} = \sqrt{4} \times \sqrt{3}$$

$$(2) \quad 3 \times 4 = 12 \quad (3 \times 3) = 9 \quad (4 \times 3) = 12$$

بالمثل يمكن استنتاج أن :

$$(\sqrt{3} \times \sqrt{4}) = \sqrt{3 \times 4} = \sqrt{12}$$

$$12 = 3 \times 4 =$$

(٣) أوجد ناتج :

$$[1] \quad \dots = (\sqrt{0} - \sqrt{0}) \times 2$$

$$[2] \quad \dots = \sqrt{0} \times \sqrt{0}$$

خواص جمع الأعداد الحقيقية :

[١] الانغلاق :

إذا كان : $a, b \in \mathbb{R}$ يكون : $(a \times b) \in \mathbb{R}$
 أي أن : حاصل ضرب أي عددين حقيقيين هو عدد حقيقي
 وبالتالي : \mathbb{R} مغلقة تحت عملية الضرب
 فمثلاً :

$$\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36} = 6$$

[٢] الإبدال :

إذا كان : $a, b \in \mathbb{R}$ فإن : $a \times b = b \times a$
 أي أن : عملية الضرب إبدالية في \mathbb{R}
 فمثلاً :

$$\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$$

[٣] الدمج :

إذا كان : $a, b, c \in \mathbb{R}$ يكون :

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

فمثلاً :

$$\text{الدمج} \quad (\sqrt{12} \times \sqrt{3}) \times \sqrt{2} = \sqrt{12} \times \sqrt{3 \times 2} = \sqrt{12} \times \sqrt{6} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{الإبدال} \quad (\sqrt{3} \times \sqrt{12}) \times \sqrt{2} =$$

$$\text{الدمج} \quad \sqrt{3} \times (\sqrt{12} \times \sqrt{2}) =$$

$$12 = 3 \times 4 =$$

[٤] العنصر المحايد الضربي :

الواحد هو المحايد الجمعي في \mathbb{R} لأن : $a \times 1 = 1 \times a = a$

فمثلاً :

$$\sqrt{12} = \sqrt{12} \times 1 = 1 \times \sqrt{12}$$

[٥] وجود معكوس ضربي لكل عد حقيقي :

لكل عدد حقيقي $a \neq 0$ صفر يوجد عدد حقيقي $\frac{1}{a}$ حيث :

$$1 = \frac{1}{a} \times a \quad (\text{المحايد الضربي})$$

فمثلاً :

المعكوس الضربي للعدد $\overline{0}$ هو : $\frac{1}{\overline{0}}$ و العكس صحيحلأن : $1 = \frac{1}{\overline{0}} \times \overline{0}$

ملاحظات :

(١) العدد و معكوسه الضربي لهما نفس الإشارة

فمثلاً :

المعكوس الضربي للعدد $-\frac{2}{\overline{0}}$ هو : $-\frac{\overline{0}}{2}$

(٢) المعكوس الضربي للعدد : ١ هو نفسه

، و المعكوس للعدد : - ١ هو نفسه

(٣) لا يوجد معكوس ضربي للعدد صفر لأن : $\frac{1}{0}$ ليس لها معنى(٤) $1 = \frac{\overline{2}}{\overline{2}} = \frac{\overline{3}}{\overline{3}} = \frac{\overline{0}}{\overline{0}} = \dots$

(٥) يفضل أن يكون مقام العدد الحقيقي عدداً صحيحاً

فمثلاً :

 $\overline{0} = \frac{\overline{0} \cdot \overline{0}}{\overline{0}} = \frac{\overline{0}}{\overline{0}} \times \frac{\overline{0}}{\overline{0}} = \frac{\overline{0}}{\overline{0}}$ $\overline{2}^3 = \frac{\overline{2}^3 \cdot 1}{1} = \frac{\overline{2}^3}{\overline{2}^3} \times \frac{\overline{2}^3}{\overline{2}^3} \times \frac{1}{\overline{2}^3} = \frac{1}{\overline{2}^3}$ ،

[٦] توزيع الضرب على الجمع :

لأي ثلاثة أعداد حقيقية m ، b ، c يكون : $c \cdot m + c \cdot b = (c \times m) + (c \times b) = (c + b) \times m$ $c \cdot m + c \cdot b = (c \times m) + (c \times b) = c \times (m + b)$ ،

فمثلاً :

 $\overline{0} \times \overline{0}^3 + 2 \times \overline{0}^3 = (\overline{0} + 2) \overline{0}^3$ $10 + \overline{0}^{12} = 0 \times 3 + \overline{0}^2 \times 3 =$ رابعاً : **قسمة الأعداد الحقيقية :**حيث أن لكل عدد حقيقي لا يساوي الصفر معكوس ضربي فإن عملية القسمة على أي عدد حقيقي خلاف الصفر ممكنة دائماً في \mathbb{R} و تعرف كما يلي :لكل $m \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ يكون : $\frac{m}{b} \times b = m$ ($b \neq 0$)
أي أن :عملية القسمة $(\frac{m}{b})$ تعني ضرب m في المعكوس الضربي للعدد b و يلاحظ أن :عملية القسمة في \mathbb{R} ليست إبدالية و ليست دمجية

(٤) أكمل ما يلي :

$$\dots = \overline{7} \times \overline{7} \quad [1]$$

$$\dots + 2 = 2 \times \overline{3} \quad [2]$$

$$\dots = \overline{2} \times \dots = \overline{2} + \overline{2} + \overline{2} \quad [3]$$

$$\dots = \overline{0}^2 \times \overline{0}^3 \quad [4]$$

$$\dots = \overline{2}^3 \times \overline{2}^3 \times 2 \quad [5]$$

$$[٦] \quad \dots = (\sqrt{2} + \sqrt{5}) \sqrt{5}$$

$$[٧] \quad \dots = (\sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{2}) \sqrt{3}$$

$$[٨] \quad \dots = (\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$[٩] \quad \dots = (\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$[١٠] \quad \dots \text{ هو } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ المعكوس الضربي للعدد}$$

$$[١١] \quad \dots \text{ العدد المحايد الضربي في } \mathbb{R} \text{ هو}$$

$$(٥) \quad \text{إذا كان : } \sqrt{2} + \sqrt{3} = س , \sqrt{2} - \sqrt{3} = ص \text{ أوجد قيمة :}$$

$$[١] \quad س + ص \quad [٢] \quad س - ص \quad [٣] \quad س - \sqrt{2} - \sqrt{3} + ص$$

$$(٦) \quad \text{أكمل لتقدير ناتج } (\sqrt{10} + ٥)(\sqrt{3} - ٣)$$

و تحقق من صحة التقدير باستخدام الآلة الحاسبة

$$\text{تقدير } \sqrt{10} \text{ هو : } \dots \text{ لأن : } \sqrt{9} = \dots$$

$$\therefore \text{ تقدير } (\sqrt{10} + ٥) \text{ هو : } \dots + ٥ = \dots$$

$$\text{, تقدير } \sqrt{3} \text{ هو } \dots \text{ لأن : } \sqrt{٨} = \dots$$

$$\therefore \text{ تقدير } (\sqrt{3} - ٣) \text{ هو : } \dots - ٣ = \dots$$

$$\therefore \text{ تقدير } (\sqrt{10} + ٥)(\sqrt{3} - ٣) \text{ هو : } \dots \times \dots = \dots$$

و باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن الناتج هو

أي أن التقدير

$$(٧) \quad \text{أعط تقديرًا لناتج } (\sqrt{10} + ٢)(\sqrt{3} - ٤)$$

و تحقق من صحة التقدير باستخدام الآلة الحاسبة

(٨) أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

$$[1] \dots = \sqrt{0} + \sqrt{0}$$

$$(\sqrt{1}, \sqrt{2}, 1, 0)$$

$$[2] \dots = (\sqrt{2}, 2)$$

$$(\sqrt{8}, \sqrt{4}, 8, 4)$$

$$[3] \dots = (\sqrt[3]{0}, \sqrt[3]{2})$$

$$(\sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{4}, 2, 4)$$

[٤] المعكوس الجمعي للعدد $\frac{1}{\sqrt{2}}$ هو

$$(\sqrt{3}-, \sqrt{2}-, \sqrt{3}, \sqrt{2})$$

[٥] المعكوس الجمعي للعدد $(\sqrt{2}-\sqrt{0})$ هو

$$(\sqrt{2}-\sqrt{0}-, \sqrt{2}+\sqrt{0}, \sqrt{2}-\sqrt{0}, \sqrt{0}-\sqrt{2})$$

$$[6] \dots = \frac{10}{\sqrt[3]{0}}$$

$$(\sqrt{0}, \sqrt[3]{0}, \sqrt{0}, \sqrt[3]{10})$$

$$[7] \dots = \frac{\sqrt[3]{-1}}{\sqrt[3]{3}}$$

$$(1+\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}+1, 1-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}-1)$$

[٨] المعكوس الضربي للعدد $\frac{3-}{\sqrt[3]{3}}$ هو

$$(\sqrt[3]{3}-, \sqrt[3]{-}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{})$$

$$[9] (\sqrt{3}-\sqrt{0}) = 14 - \dots$$

$$(\sqrt{9}, \sqrt{6}, \sqrt{4}, \sqrt{2})$$

[١٠] إذا كان بعدا مستطيل هما $(\sqrt{2}+1)$ سم ، $(\sqrt{2}-1)$ سم

فإن محيطه = سم

$$(\sqrt{2}, \sqrt{4}, 2, 4)$$

[١١] إذا كان بعدا مستطيل هما $(\sqrt{0}+1)$ سم ، $(\sqrt{0}-1)$ سمفإن مساحته = سم^٢

$$(\sqrt{6}, 3, 31, 41)$$

[١٢] إذا كان : $\sqrt{1} + \sqrt{2} = \sqrt{s}$ فإن : $s = \dots$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2}, \sqrt{3}+2, \sqrt{3}-\sqrt{2}, \sqrt{3}-2)$$

[١٣] إذا كان : $s = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ فإن : $s = \dots$

$$(\sqrt{3} \pm, \sqrt{3} \pm, \sqrt{3}-, \sqrt{3})$$

[١٤] إذا كان : $s - \sqrt{16} = \sqrt{v}$ فإن : $v = \dots$ فإن : $s + v = \dots$

$$(\sqrt{32}, \sqrt{14}, \sqrt{8}, \sqrt{4})$$

[١٥] إذا كان : المعكوس الضربي للعدد $\sqrt{s} - 1$ هو العدد $\frac{1}{(1+\sqrt{s})}$ فإن : $s = \dots$

$$(2, 3, 4, 0)$$

الدرس الثامن : العمليات على الجذور التربيعية

إذا كان : p ، b عددين حقيقيين غير سالبين فإن :

$$(1) \quad \sqrt{pb} = \sqrt{b} \times \sqrt{p}$$

$$\text{فمثلاً : } \sqrt{10} = \sqrt{0 \times 2} = \sqrt{0} \times \sqrt{2}$$

$$(2) \quad \sqrt{b} \times \sqrt{p} = \sqrt{b \times p}$$

$$\text{فمثلاً : } \sqrt{3} \times \sqrt{4} = \sqrt{3 \times 4} = \sqrt{12}$$

تستخدم هذه القاعدة لكتابة العدد على الصورة : \sqrt{a} حيث a لا يقبل أن يكون أحد العددين مربع كامل بخلاف الواحد(1) ضع كل مما يلي على صورة \sqrt{a} حيث a ، b عدنان صحيحان ، a أصغر قيمة ممكنة :

$$(1) \quad \dots = \sqrt{8}$$

$$(2) \quad \dots = \sqrt{20}$$

$$(3) \quad \dots = \sqrt{48}$$

$$(4) \quad \dots = \sqrt{50} \times 2$$

$$(5) \quad \dots = \sqrt{72} \times \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{p}{b}} \quad \text{حيث : } b \neq 0$$

فمثلاً :

$$\sqrt{0} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{0}}{2} = \frac{0}{2} = \sqrt{\frac{0}{4}}$$

$$\sqrt{3} \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{2} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$(4) \quad \frac{\sqrt{pb}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{pb}{b}} = \sqrt{\frac{p}{b}} \quad \text{حيث : } b \neq 0$$

فمثلاً :

$$3 = \sqrt{9} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$$

(2) اختصر إلى أبسط صورة :

$$(1) \quad \dots = \sqrt{0} + \sqrt{8}$$

$$(2) \quad \dots = \sqrt{20} - \sqrt{20}$$

$$(3) \quad \dots = \sqrt{\frac{1}{3}} \times 3 - \sqrt{27} \times 2$$

$$(4) \quad \dots = \sqrt{32} + \sqrt{18} - \sqrt{128} - \sqrt{98}$$

العددان المترافقان :

إذا كان : p ، b عددين نسبين موجبين فإن :
كلًا من العددين : $(\sqrt{b} + \sqrt{p})$ ، $(\sqrt{b} - \sqrt{p})$
هو مرافق للعدد الآخر

و يكون مجموعهما $(\sqrt{b} - \sqrt{p}) + (\sqrt{b} + \sqrt{p}) =$

$$2\sqrt{p} = \text{ضعف الحد الأول}$$

و حاصل ضربهما $(\sqrt{b} - \sqrt{p}) \times (\sqrt{b} + \sqrt{p}) =$

$$b - p = (\sqrt{b})^2 - (\sqrt{p})^2 =$$

$$= \text{مربع الحد الأول} - \text{مربع الحد الثانى}$$

ملاحظة : حاصل ضرب العددين المترافقين هو دائماً عدد نسبى

فمثلاً : مرافق العدد $(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ هو $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ و

يكون : مجموعهما $2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ ، و حاصل ضربهما $2 - 3 = -1$

(٣) أكمل ما يلى :

[١] مرافق العدد $(\sqrt{2} + \sqrt{5})$ هو

و مجموعهما = و حاصل ضربهما =

[٢] مرافق العدد $(\sqrt{7} - 3)$ هو

و مجموعهما = و حاصل ضربهما =

[٣] مرافق العدد $(\sqrt{6} + 3\sqrt{2})$ هو

و مجموعهما = و حاصل ضربهما =

ملاحظة : إذا كان لدينا عدد حقيقى مقامه على الصورة

$(\sqrt{b} + \sqrt{p})$ أو $(\sqrt{b} - \sqrt{p})$ فيجب وضعه
فى أبسط صورة و ذلك بضرب البسط و المقام فى مرافق المقام

فمثلاً : لكتابة العدد $\frac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$ فى أبسط صورة نتبع ما يلى :

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \cdot 3}{2 - 5} =$$

(٤) أكتب ما يلى فى أبسط صورة :

$$[1] \quad \dots = \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{7}}$$

$$[2] \quad \dots = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} - 2}$$

$$(٥) \text{ إذا كان : } \sqrt{3} - \sqrt{5} = \text{س} , \quad \sqrt{2} + \sqrt{5} = \text{ص} ,$$

أثبت أن : س ، ص مترافقان ثم أوجد قيمة كل من :

$$[١] \text{ س} + \text{س} + \text{ص} + \text{ص}$$

$$[٢] \text{ س} - \text{س} - \text{ص} + \text{ص}$$

$$(٦) \text{ إذا كان : } \sqrt{13} + \sqrt{6} = \text{س} , \quad \sqrt{7} = \text{ص} ,$$

أوجد قيمة كل من :

$$[١] \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{س} - \text{ص}}$$

$$[٢] \text{ س} + \text{ص}$$

أحمد الشنتوري



$$[10] \quad \dots = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$(\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1)$$

(٨) أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[1] المعكوس الضربي للعدد $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ في أبسط صورة هو

[2] إذا كان : $\sqrt{2} - \sqrt{5} = س$ ، $\sqrt{2} + \sqrt{5} = ص$ ، فإن : $(س ص ، س + ص) = \dots$

[3] إذا كان : $\sqrt{5} + 2 = س$ ، $\sqrt{5} - 2 = ص$ ، العدد المرافق للعدد س فإن : $(س - ص) = \dots$

[4] مساحة المثلث الذي طول قاعدته $(2 + 2\sqrt{8})$ سم ، ارتفاعه $(1 - \sqrt{7})$ سم تساوى سم

[5] إذا كان : $\sqrt{2} - 1 = س$ ، $1 - \sqrt{2} = ص$ ، فإن : $ص = \dots$

[6] $\dots = \sqrt{18} - \sqrt{8} + \sqrt{2} \times 4$

[7] $\dots = \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{12}$

(٧) أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[1] $\dots = \sqrt{3} - \sqrt{12}$ ($\sqrt{3} , \sqrt{3} - 2 , 9 , 3$)

[2] $\dots = \sqrt{2} - \sqrt{8} - \sqrt{50}$

($2 , \sqrt{30} , \sqrt{2} , \sqrt{2} - 2$)

[3] $\dots = (\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{5} - \sqrt{7})$

($\sqrt{5} - 2 , \sqrt{7} - 2 , 12 , 2$)

[4] $\dots = (\sqrt{2} + \sqrt{8})$

($\sqrt{18} , \sqrt{10} , 18 , 10$)

[5] $\dots = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

($\sqrt{2} \frac{1}{2} , \sqrt{2} , \frac{1}{2} , 1$)

[6] المعكوس الضربي للعدد $\sqrt{50}$ هو

($\sqrt{2} - 5 , \sqrt{2} - 5 , \sqrt{2} - \frac{1}{5} , \sqrt{2} - \frac{1}{5}$)

[7] العدد التالي في النمط : $\sqrt{2} , \sqrt{8} , \sqrt{18} , \sqrt{32}$ هو

($\sqrt{80} , \sqrt{72} , \sqrt{50} , \sqrt{38}$)

[8] $\dots \times 2 = \sqrt{48} \frac{1}{2}$

($\sqrt{2} , \sqrt{3} , \sqrt{3} - 2 , \sqrt{2} - 3$)

[9] إذا كان : $\sqrt{2} - \sqrt{7} = س$ ، $\sqrt{3} = ص$ فإن :

$\dots = س$ ($2 , 3 , 2 - 3 , 3 - 2$)

أحمد الشنتوري

الدرس التاسع : العمليات على الجذور التكعيبية

إذا كان : p ، b عددين حقيقيين فإن : $\sqrt[p]{\frac{1}{b}}$

$$\sqrt[p]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[p]{b}} \quad (1)$$

$$\sqrt[p]{1 \cdot b} = \sqrt[p]{0 \times 2} = \sqrt[p]{0} \times \sqrt[p]{2} = 0 \times \sqrt[p]{2} = 0$$

$$\sqrt[p]{b} \times \sqrt[p]{p} = \sqrt[p]{b \times p} \quad (2)$$

$$\sqrt[p]{3} \times \sqrt[p]{8} = \sqrt[p]{3 \times 8} = \sqrt[p]{24} = \sqrt[p]{2 \times 12} = \sqrt[p]{2} \times \sqrt[p]{12}$$

تستخدم هذه القاعدة لكتابة العدد على الصورة : $\sqrt[p]{s}$ حيث s عددان
لاحظ : يجب أن يكون أحد العددين مكعب كامل بخلاف الواحد

(1) ضع كل مما يلي على صورة $\sqrt[p]{s}$ حيث s ، v عددان صحيحان ، v أصغر قيمة ممكنة :

$$\dots = \sqrt[p]{16} \quad (1)$$

$$\dots = \sqrt[p]{\frac{1}{4}} \quad (2)$$

$$\dots = \sqrt[p]{81} \times \sqrt[p]{2} \quad (3)$$

$$\dots = \sqrt[p]{\frac{1}{250}} \quad (4)$$

$$\sqrt[p]{\frac{p}{b}} = \frac{\sqrt[p]{p}}{\sqrt[p]{b}} \quad (3) \quad \text{حيث : } b \neq 0, p, b \in \mathbb{R}$$

أحمد الشنتوي

فمثلاً :

$$2 = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{\frac{24}{3}} = \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}$$

$$\sqrt[p]{\frac{p}{b}} = \sqrt[p]{\frac{p}{b}} \quad (4) \quad \text{حيث : } b \neq 0, p, b \in \mathbb{R}$$

أحمد الشنتوي

فمثلاً :

$$\sqrt[3]{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{12}} = \frac{1}{\sqrt[3]{12}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2 \times 6}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{6}} = \frac{1}{\sqrt[3]{12}}$$

(2) اختصر إلى أبسط صورة :

$$\dots = \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{54} \quad (1)$$

$$\dots = \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{108} \quad (2)$$

$$\dots = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{81} \quad (3)$$

$$\dots = \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128} \times 2 - \sqrt[3]{20} \quad (4)$$

(٣) أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

$$[1] \dots = \sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{81}$$

$$(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{07}, \sqrt[3]{3})$$

$$[2] \dots = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{130}$$

$$(\sqrt[3]{170}, \sqrt[3]{0}, \sqrt[3]{0}, \sqrt[3]{0})$$

$$[3] \dots = \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{3}$$

$$(\sqrt[3]{27}, \sqrt[3]{27}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{1})$$

$$[4] \dots = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}$$

$$(\sqrt[3]{16}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$$

$$[5] \dots = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{24}$$

$$(\sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{12}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{-8})$$

(٤) أختصر كلاً مما يلي لأبسط صورة :

$$[1] \dots = \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{98} - \sqrt[3]{04} + \sqrt[3]{18}$$

$$[2] \dots = \sqrt[3]{73} + \sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{28} - \sqrt[3]{81}$$

$$[3] \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3} = \text{ص} , \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{3} = \text{س} : \text{إذا كان}$$

أوجد قيمة كل من :

$$[2] (\text{س} + \text{ص})$$

$$[1] (\text{س} - \text{ص})$$

الدرس العاشر : تطبيقات على الأعداد الحقيقية

الدائرة :

محيط الدائرة = $2\pi r$ ن. وحدة طوليةمساحة سطح الدائرة = πr^2 ن. وحدة مربعة

حيث : ن. طول نصف قطر الدائرة ،

 π هي النسبة التقريبية بين محيط الدائرة و طول القطر

$$\pi = \frac{22}{7} \text{ أو } 3,14$$

فمثلاً :

لايجاد مساحة دائرة محيطها ٣١,٤ سم ، ($3,14 = \pi$) نتبع ما يلي :بما أن : محيط الدائرة = $2\pi r$ ن.

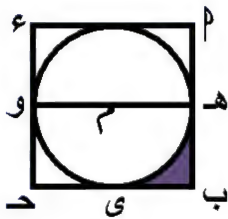
$$\text{إذن : } 31,4 = 2 \times 3,14 \times r \Rightarrow r = 5 \text{ سم}$$

$$\text{إذن : } 0 = 31,4 \div 6,28 = 5 \text{ سم}$$

$$\text{مساحة سطح الدائرة} = \pi r^2 = 3,14 \times 5 \times 5 = 78,5 \text{ سم}^2$$

$$(1) \text{ دائرة محيطها } 88 \text{ سم أوجد مساحة سطحها } (\pi = \frac{22}{7})$$

$$(2) \text{ دائرة مساحة سطحها } 314 \text{ سم}^2 \text{ أوجد محيطها } (\pi = 3,14)$$



(٣) في الشكل المقابل :

أ ب د مربع مرسوم داخل دائرة م

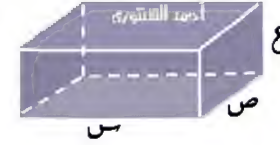
فإذا كان محيط الجزء المظلل ٢٥ سم أوجد :

مساحة المربع ، مساحة الدائرة ($\frac{22}{7} = \pi$)

متوازي المستطيلات :

هو مجسم جميع أوجهه مستطيلة الشكل
و كل وجهين متقابلين متطابقان

إذا كانت أطوال أحرفه س ، ص ، ع فإن :



$$\text{المساحة الجانبية} = \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$= 2(s + v) \times e \text{ وحدة مربعة}$$

$$\text{المساحة الكلية} = \text{المساحة الجانبية} + 2 \times \text{مساحة القاعدة}$$

$$= 2(s + v + e) \text{ وحدة مربعة}$$

$$\text{الحجم} = \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$= s \times v \times e \text{ وحدة مكعبة}$$

حالة خاصة : المكعب

هو متوازي مستطيلات أطوال أحرفه متساوية
إذا كان طول حرفه = ل وحدة طول فإن :



$$\text{مساحة كل وجه} = l^2 \text{ وحدة مربعة}$$

$$\text{المساحة الجانبية} = 4l^2 \text{ وحدة مربعة}$$

$$\text{المساحة الكلية} = 6l^2 \text{ وحدة مربعة}$$

$$\text{الحجم} = l^3 \text{ وحدة مكعبة}$$

أحمد الشنتوري

- (٤) متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ، و حجمه ٧٢ سم^٣
و ارتفاعه ٥ سم أوجد حجمه

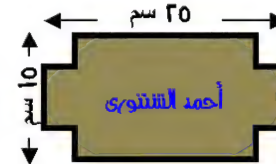
- (٥) مكعب حجمه ١٢٥ سم^٣ أوجد مساحته الكلية

(٦) أيهما أكبر حجماً مكعب مساحته الكلية ٢٩٤ سم^٢ أم متوازي مستطيلات أبعاده $2\sqrt{7}$ ، $2\sqrt{5}$ ، ٥ سم

(٨) مكعب حجمه ١٧٢٨ سم^٣ ، قطع عند أحد أحرفه متوازي مستطيلات أبعاده ٣ سم ، ٢ سم ، ١ سم أوجد المساحة الكلية للجزء المتبقى من المكعب

أحمد الشنتوي

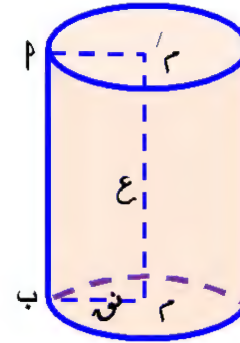
(٧) قطعة من الورق المقوى مستطيلة الشكل بعدها ٢٥ سم ، ١٥ سم قطع من كل ركن من أركانها الأربعة مربع طول ضلعه ٤ سم ثم طويت الأجزاء البارزة لتكون حوضاً على شكل متوازي مستطيلات أوجد حجمه و مساحته الكلية



(٩) متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل و إرتفاعه ٣ سم فإذا كان مجموع أطوال أحرفه ٥٢ سم أوجد حجمه

الأسطوانة الدائرية القائمة :

هي مجسم له قاعدتان متوازيتان و متطابقتان كل منهما عبارة سطح دائرة أما السطح الجانبي فهو سطح منحني يسمى سطح الأسطوانة في الشكل المقابل :



إذا كان : r ، h مركزي قاعدتي الأسطوانة فإن :
 h هو ارتفاع الأسطوانة ، $h = r$ ،
 كل منهما = طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة

، $h \parallel r$ و إذا قطعنا سطح

الأسطوانة الجانبي عند h و بسطنا
 هذا السطح نحصل على سطح المستطيل

h ب h و يكون : $h = r$ ارتفاع

الأسطوانة ، $h = r$ محيط قاعدة الأسطوانة

، مساحة المستطيل h ب h = المساحة الجانبية للأسطوانة

المساحة الجانبية للأسطوانة = محيط القاعدة \times الارتفاع
 $h = 2\pi r$ وحدة مربعة

المساحة الكلية للأسطوانة = المساحة الجانبية + $2 \times$ مساحة القاعدة
 $h = 2\pi r + 2\pi r^2$ وحدة مربعة

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة \times الارتفاع
 $h = \pi r^2$ وحدة مكعبة

أحمد الشنتوي

(١٠)

قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل h ب h فيه $h = r$ سم ،
 طويت على شكل أسطوانة دائرية قائمة بحيث ينطبق h ب على h أوجد حجم الأسطوانة الناتجة
 $(\pi = \frac{22}{7})$

أحمد الشنتوي

(١١)

أسطوانة دائرية قائمة محيط قاعدتها = 44 سم ، حجمها = 380 سم^٣
 أوجد ارتفاعها $(\pi = \frac{22}{7})$

(١٢) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٧٠٣٦ سم^٣ و ارتفاعها ٢٤ سم
أوجد مساحتها الكلية ($\pi = ٣,١٤$)

(١٤) قطعة من الشيكولاتة على شكل أسطوانة دائرية قائمة طول نصف
قطر قاعدتها ١١ سم و ارتفاعها $١٠,٥$ سم صهرت و حولت إلى ٣
مكعبات متساوية الحجم أوجد طول حرف المكعب الواحد
($\frac{٢٢}{٧} = \pi$)

أحمد الشنتوي

(١٣) أيهما أكبر حجماً أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها
 ٧ سم و ارتفاعها ١٠ سم أم مكعب طول حرفه ١١ سم ؟
($\frac{٢٢}{٧} = \pi$)

(١٥) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوي طول نصف قطر قاعدتها و
حجمها يساوي ٢٧π سم^٣ أوجد مساحتها الجانبية بدلالة π



الكرة :

هي مجسم سطحه منحنى جميع نقاط سطحه على أبعاد متساوية (نـ) من نقطة ثابتة داخله (مركز الكرة) إذا قطعت الكرة بمستوى مار بمركزها فإن المقطع دائرة مركزها هو مركز الكرة ، و طول نصف قطرها هو طول نصف قطر الكرة (نـ)



مساحة سطح الكرة = $\pi \times 4$ نـ^٢ وحدة مربعة

حجم الكرة = $\frac{4}{3} \pi \times 3$ نـ^٣ وحدة مكعبة

(١٦) كرة مساحة سطحها ١٢٥٦ سم^٢ أوجد حجمها ($\pi = ٣,١٤$)

(١٨) متوازي مستطيلات من الرصاص أطوال أحرفه ٧٧ ، ٢٤ ، ٢١ سم شكلت منه مادة لتكوين كرة أوجد طول نصف قطر الكرة ($\frac{٢٢}{٧} = \pi$)

أحمد الشنتوري

(١٩) كرة حجمها 36π سم^٣ وضعت داخل مكعب فمست أوجهه الستة
أوجد مساحة سطح الكرة ثم أوجد حجم المكعب

(٢١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] حجم الكرة التي طول نصف قطرها $\sqrt[3]{3}$ سم يساوى سم^٣

($\pi \frac{9}{4}$ ، $\pi \frac{4}{3}$ ، $\pi \sqrt[3]{3}$ ، $\pi 4$)

[٢] طول نصف قطر الكرة التي مساحتها 9π سم^٢ يساوى سم

(٩ ، ٦ ، ٣ ، ١,٥)

[٣] المساحة الكلية لمكعب حجمه ٨ سم^٣ تساوى سم^٢

(٢ ، ٤ ، ١٦ ، ٢٤)

[٤] طول نصف قطر دائرة مساحتها 2π سم^٢ يساوى سم

(١ ، ٢ ، $\sqrt{2}$ ، ٤)

[٥] ارتفاع متوازي المستطيلات الذى مساحته الجانبية ٢٤. سم^٢

و قاعدته على شكل مربع طول ضلعه ٦ سم يساوى سم

(١٠ ، ٦ ، ٥ ، ٣)

[٦] إذا كانت المساحة الجانبية لأسطوانة دائرية قائمة طول نصف

قطرها ٨ سم π فإن ارتفاعها = سم

(٨ ، ٤ ، ١٠ ، ١٦)

(٢٠) كرة معدنية جوفاء طولاً نصفى قطريها الداخلى و الخارجى ٢,١ سم
، ٣,٥ سم على الترتيب أوجد كتلتها علماً بأن السنتيمتر المكعب من
هذا المعدن كتلته ٢٠ جرام ($\frac{22}{7} = \pi$)

للامانة العلمية

يرجى عدم حذف أسمى نهائياً
يسمح فقط بإعادة النشر
دون أى تعديل

الدرس الحادي عشر : حل المعادلات و المتباينات من الدرجة الأولى
في متغير واحد في ح

أولاً : حل المعادلات من الدرجة الأولى في متغير واحد في ح
نعلم أن :

(١) المعادلة هي :

جملة رياضية تحتوي على متغير أو أكثر وتحتوي علاقة التساوي
بين عبارتين رياضيتين
فمثلاً :

الجملة الرياضية : $s - 1 = 7$ تسمى معادلة حيث :
تحتوي على المتغير أو المجهول (س) ، علاقة التساوي (=)
بين العبارتين (س - 1) بالطرف الأيمن ، (7) بالطرف الأيسر
(٢) درجة المعادلة هي :

أعلى درجة حد جبري تحتوي عليه المعادلة
فمثلاً :

المعادلة : $s - 1 = 7$ من الدرجة الأولى ،
المعادلة : $s^2 + 9 = 0$ من الدرجة الثانية ، و هكذا
(٣) حل المعادلة هو :

إيجاد قيمة المتغير (المجهول) التي تحقق تساوي طرفي المعادلة
(٤) مجموعة حل المعادلة :

هي المجموعة التي تحقق عناصرها المعادلة
ملاحظة :

في حالة المعادلة من الدرجة الأولى في مجهول واحد :
للمجهول قيمة واحدة

(٥) خواص علاقة التساوي :

إذا كان : س ، ص ، ع أعداداً حقيقية فإن :

[١] إذا كان : س = ص فإن : س ± ع = ص ± ع

[٢] إذا كان : س = ص فإن : س × ع = ص × ع

[٣] إذا كان : س × ع = ص × ع فإن : س = ص ، ع ≠ ٠

كيفية حل المعادلات من الدرجة الأولى في متغير واحد في ح :

(١) $s - 1 = 7$ بإضافة (١) للطرفين ينتج :

$s = 8$ بقسمة طرفي المعادلة على (١) ينتج :

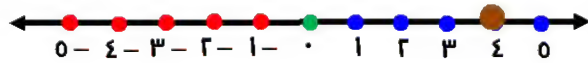
س = ٨ ∴ مجموعة الحل = { ٨ }

ملاحظة :

يمكن ضرب طرفي المعادلة : $s - 1 = 7$ في المعكوس الضربي
لمعامل س و هو $\frac{1}{s}$ كما يلي :

$$\frac{1}{s} \times (s - 1) = \frac{1}{s} \times 7 \quad \therefore 1 = \frac{7}{s}$$

و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل التالي :



(٢) $\sqrt{s} + 1 = 7$ بإضافة (١ -) للطرفين ينتج :

$\sqrt{s} = 6$ بضرب طرفي المعادلة في $\frac{1}{\sqrt{s}}$ ينتج :

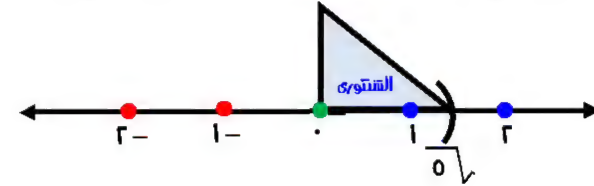
$$\sqrt{s} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}} \times \frac{6}{\sqrt{s}} = \frac{6}{\sqrt{s}} = s$$

$$[٤] \sqrt{3} - 2 = 1$$

$$[٥] \sqrt{2} = 1 - 3$$

$$[٦] \sqrt{7} - 7 = \sqrt{6}$$

∴ مجموعة الحل = $\{\sqrt{0}\}$
و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل التالي



(١) أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية و مثل الحل على خط الأعداد :

$$[١] 3 = 7 + 3$$

$$[٢] 4 = 4 + 3$$

$$[٣] 0 = 2 + 3$$

ثانياً : حل المتباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد في ح

نعلم أن :

(١) المتباينة :

هي جملة رياضية تتضمن علامة التباين بين عبارتين رياضيتين

ملاحظة :

علامات التباين هي :

$<$: أكبر من ، $>$: أقل من
 \leq : أكبر من أو يساوي ، \geq : أقل من أو يساوي

فمثلاً :

الجملة الرياضية : $s - 1 > 7$ تسمى متباينة حيث :

تحتوي على المتغير أو المجهول (س) ، علاقة التساوي ($>$)
 بين العبارتين (س - 1) بالطرف الأيمن ، (7) بالطرف الأيسر

(٢) درجة المتباينة هي :

أعلى درجة حد جبرى تحتوى عليه المتباينة

فمثلاً :

المتباينة : $s - 1 < 7$ من الدرجة الأولى ،

المتباينة : $s + 9 \geq 0$ من الدرجة الثانية ، و هكذا

(٣) حل المتباينة هو :

إيجاد قيم المتغير (المجهول) التى تحقق تساوى طرفى المعادلة

(٤) مجموعة حل المعادلة :

هي مجموعة العناصر التى يحقق كل منها المتباينة

و تكتب فى صورة فترة

ملاحظة : فى حالة المتباينة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد :
 للمجهول قيمة واحدة أو أكثر

(٥) خواص علاقة التباين :

إذا كان : س ، ص ، ع أعداداً حقيقية و كان $s > v$ فإن :

[١] $s + c > v + c$

سواء كانت ع موجبة أو سالبة (خاصية الإضافة)

[٢] إذا كان : ع $<$. فإن : $s \times c > v \times c$

خاصية الضرب فى عدد حقيقى موجب

[٣] إذا كان : ع $>$. فإن : $s \times c < v \times c$

خاصية الضرب فى عدد حقيقى سالب

أى أن : عند ضرب (أو قسمة) طرفى المتباينة فى (على)

عدد سالب يتغير اتجاه علامة التباين

ملاحظة :

يمكن استنتاج خواص علاقة التباين السابقة فى جميع علاقات

التباين : $>$ أو $<$ أو \leq أو \geq

كيفية حل المعادلات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح :

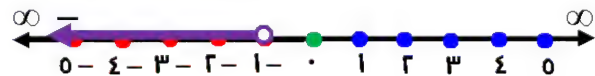
(١) $s + 1 > 10$ بإضافة (- 1) للطرفين

$s > 9$

بضرب طرفى المتباينة فى ($\frac{1}{p}$ < 0) ينتج :

$s > 1$. ∴ مجموعة الحل = $]-1, \infty[$

و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل التالى :



(٢) أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المتباينات التالية و مثل الحل على خط الأعداد :

$$[1] \quad 3 - s < 2$$

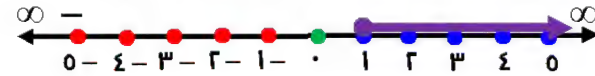
$$(2) \quad 3 - s \geq 1 \quad \text{إضافة (- 3) للطرفين}$$

$$2 - s \geq 2$$

بضرب طرفي المتباينة في $(-\frac{1}{1})$ ينتج :

$$s \leq 1 \quad \therefore \text{مجموعة الحل} =]-\infty, 1]$$

و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل التالي :



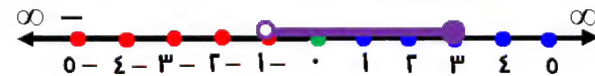
$$[2] \quad 3 - s \leq 4$$

$$(3) \quad 0 - s > 3 - 2 \geq 7 \quad \text{إضافة (2) للأطراف}$$

بالضرب في $(-\frac{1}{1})$ ينتج :

$$-s > 1 \quad \therefore \text{مجموعة الحل} =]-1, -\infty[$$

و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل التالي :



$$[3] \quad 0 \geq 1 - s > 3 - 2$$

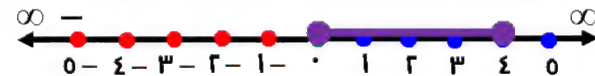
$$(4) \quad s + 2 \geq 3 + s \geq 2 + s \geq 8 + s \quad \text{إضافة (s)}$$

$$8 \geq 2 + s \geq 2 \quad \text{إضافة (2 -)}$$

$$8 \geq s \geq 0 \quad \text{بالضرب في } (-\frac{1}{1})$$

$$4 \geq s \geq 0 \quad \therefore \text{مجموعة الحل} = [0, 4]$$

و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل التالي :



أحمد الشنتوري

$$[٤] \quad \frac{1}{4} \leq 1 + s \leq 2$$

$$[٧] \quad |2 - s| > 3 - s \geq 1$$

$$[٥] \quad 2 - s \geq 3 - s \geq 0$$

$$[٨] \quad \sqrt[3]{8 - s} > 1 + s \geq \sqrt[3]{9}$$

أحمد الشنتوري

$$[٦] \quad 1 - s \geq 3 - s \geq 0 + s$$

(٣) إذا كانت: $[٧, ٤]$ هي مجموعة حل المتباينة :
 $p \leq 3 - s \leq p$ أوجد قيمة كل من : p ، b



(٤) أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] مجموعة حل المعادلة : $٢س - ٣ = ٧$ في $ح$ هي(\emptyset ، $\{٥\}$ ، $\{١٠\}$ ، $\{٤\}$)[٢] مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{٢}س = ٤$ في $ح$ هي(\emptyset ، $\{\sqrt{٢}٤\}$ ، $\{\sqrt{٢}٢\}$ ، $\{\sqrt{٢}\}$)[٣] مجموعة حل المعادلة : $س - \sqrt{٣} = \sqrt{٣}$ في $ح$ هي(\emptyset ، $\{\text{صفر}\}$ ، $\{\sqrt{٣}٢\}$ ، $\{\sqrt{٣}\}$)[٤] مجموعة حل المتباينة : $س < ٧$ في $ح$ هي($٧[،] \infty$ ، $٧[،] \infty$ ، $٧[،] \infty$ ، $٧[،] \infty$)[٥] مجموعة حل المتباينة : $١ - س > ١$ في $ح$ هي($١[،] \infty$ ، $١[،] \infty$ ، $١[،] \infty$ ، $١[،] \infty$)[٦] مجموعة حل المتباينة : $١ - س \geq ١$ في $ح$ هي($١[،] \infty$ ، $١[،] \infty$ ، $١[،] \infty$ ، $١[،] \infty$)[٧] إذا كان : $٢ - س > ٢$ فإن $٢س + ٣ \in$ ($٧[،] \infty$ ، $٧[،] \infty$ ، $٧[،] \infty$ ، $٧[،] \infty$)[٨] العدد : $٢ \in$ مجموعة حل المتباينة($س > ٢$ ، $س < ٢$ ، $س \geq ٢$ ، $س \leq ٢$)[٩] إذا كان : $س \in [٢ ، \infty]$

فإن : العبارة تمثل المتباينة

($س \geq ٢$ ، $س \leq ٢$ ، $س > ٢$ ، $س < ٢$)

أحمد الشنتوري

(٥) أكمل ما يلي لتحصل على عبارة صحيحة حيث $س \in ح$:[١] إذا كان : $س + ٥ = ١١$ فإن : $٦س =$ [٢] إذا كان : $٣س = ٦$ فإن : $س + ٦ =$ [٣] إذا كان : $٢س - ١ = ٧$ فإن : $\frac{١}{٢}س =$ [٤] إذا كانت مجموعة حل المعادلة : $س + ل = ٤$ هي $\{٣\}$ فإن : $ل =$ [٥] إذا كانت مجموعة حل المعادلة : $٣س + ٢ل = ٥$ هي $\{١\}$ فإن : $ل =$ [٦] مجموعة حل المعادلة : $س + = ٧$ هي $\{٢ -\}$ [٧] مجموعة حل المتباينة : $س > ٣$ هي[٨] مجموعة حل المتباينة : $س \leq ١$ هي[٩] مجموعة حل المتباينتين : $س > ٣$ ، $س \leq ١$ معاً هي[١٠] إذا كان : $٢ > ب$ فإن : $٣ - ب$ [١١] إذا كان : $٢ > ب$ ، $س = ٣$ فإن : $٢س$ [١٢] إذا كان : $٢ > ب$ ، $س = ٣$ فإن : $٢س$ [١٣] إذا كان : $١ - س > ١$ فإن : $٢س + ١ \in$

الوحدة الثانية

العلاقة بين متغيرين

الدرس الأول : العلاقة بين متغيرين

تمهيد :

أشترى محمد كراسات و أقلام فإذا كان ثمن الكراسة ستة جنيهاً ، و ثمن القلم أربعة جنيهاً ، و دفع للبائع ٥٠ جنيهاً فما هي الإمكانيات المختلفة لعدد الأقلام و الكراسات التي أشتراها محمد ؟
لدراسة الإمكانيات المختلفة

نفرض أن : عدد الأقلام = س ، عدد الكراسات = ص
∴ ٦س + ٤ص = ٥٠

تسمى هذه العلاقة : **معادلة من الدرجة الأولى في متغيرين**
يمكن قسمة طرفي المعادلة على ٢ فنحصل على معادلة مكافئة لها
و هي : ٣س + ٢ص = ٢٥ و يمكن كتابتها على الصورة :
 $٢ص = ٢٥ - ٣س$ أي أن : $ص = \frac{٢٥ - ٣س}{٢}$

لاحظ أن :

س ، ص أعداد طبيعية
وفي هذه الحالة تكون س عدداً فردياً
يمكن تكوين الجدول المقابل لمعرفة الإمكانيات المختلفة

| س | ص | (س ، ص) |
|---|-------|------------|
| ١ | ١١ | (١ ، ١١) |
| ٣ | ٨ | (٣ ، ٨) |
| ٥ | ٥ | (٥ ، ٥) |
| ٧ | ٢ | (٧ ، ٢) |
| ٩ | سالبة | لا تصلح |

(١) مع مؤمن أوراق مالية فئة ٥ جنيهاً ، و أوراق مالية فئة ٢٠ جنيهاً
أشترى مؤمن من مركز تجاري بما قيمته ٨٥ جنيهاً ، ما الإمكانيات المختلفة لدفع هذا المبلغ باستخدام نوعي الأوراق المالية التي معه ؟

(٢) مثلث متساوي الساقين محيطه ١٩ سم ، ما الإمكانيات المختلفة لأطوال أضلاعه ، علماً بأن أطوال أضلاعه $\in \mathbb{N}$
تذكر : مجموع طولي ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالث

أحمد الشنتوي

دراسة العلاقة بين متغيرين

العلاقة : p س + ب ص = ح حيث : $p \neq 0$ ، $b \neq 0$.
تسمى علاقة خطية بين المتغيرين س ، ص ، و يمكن
إيجاد مجموعة من الأزواج المرتبة (س ، ص) تحقق هذه العلاقة
فمثلاً :

لدراسة العلاقة : $3س + ص = 2$
نوجد الأزواج المرتبة بوضع قيمة س وإيجاد قيمة ص المناظرة
أو العكس كما يلي :

$$\text{بوضع س} = 0 \quad \therefore 3 \times 0 + ص = 2$$

$$\therefore ص = 2 \quad \therefore (0, 2) \text{ يحقق العلاقة}$$

$$\text{بوضع س} = 1 \quad \therefore 3 \times 1 + ص = 2$$

$$\therefore ص = -1 \quad \therefore (1, -1) \text{ يحقق العلاقة}$$

$$\text{بوضع س} = -1 \quad \therefore 3 \times (-1) + ص = 2$$

$$\therefore ص = 5 \quad \therefore (-1, 5) \text{ يحقق العلاقة}$$

و هكذا نجد أن هناك عدداً لا نهائى من الأزواج المرتبة (س ، ص)
التي تحقق هذه العلاقة
ملاحظة :

يمكن كتابة العلاقة : $3س + ص = 2$ كما يلي :
 $ص = 2 - 3س$ أى : وضع أحد المتغيرين فى طرف مستقل
ثم إيجاد الأزواج المرتبة التي تحقق هذه العلاقة

(٣) أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق كلاً من العلاقات التالية :

$$[1] \text{ س} - 2 \text{ ص} = 0$$

$$[2] 2 \text{ س} + 0 \text{ ص} = 10$$

أحمد الشنتوري

(٤) بين أى الأزواج المرتبة التالية يحقق العلاقة : $٢س - ص = ١$

كما بالمثال :

مثال : (١ ، ١)

نضع : $س = ١$ ، $ص = ١$

$$\therefore ٢س - ص = ٢ \times ١ - ١ = ١ - ١ = ٠$$

\therefore (١ ، ١) يحقق العلاقة

[١] (٣ ، ٥)

[٢] (٥ ، ٣)

[٣] (٢ - ، ٥ -)

(٥) أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان : (١ ، ٢ -) يحقق العلاقة : $٣س + ٤ص = ١$

فإن : $٤ = \dots$

[٥ - ، ٥ ، ٧ - ، ٧]

[٢] إذا كان : (٥ - ، ٢) يحقق العلاقة : $٣س - ص + ٤ = ٠$

فإن : $٤ = \dots$

[١١ - ، ١١ ، ١ - ، ١]

[٣] إذا كان : (٢ ، ٤) يحقق العلاقة : $٥س - ص = ٦$

فإن : $٤ = \dots$

[٢ - ، ١ - ، ٢ ، ١]

[٤] الزوج المرتب الذى يحقق العلاقة : $٢س + ص = ٥$

هو

[(٣ - ، ١) ، (٣ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (٣ ، ١ -)]

[٥] الزوج المرتب الذى يحقق العلاقتين : $٣س + ص = ٥$ ،

$٢س + ص = ٧$ معاً هو

[(٣ - ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٢ -)]

| ٥ | ٤ | ٣ | س |
|----|----|----|---|
| ١٦ | ١٣ | ١٠ | ص |

[٦] الجدول التالى يبين

العلاقة بين س ،

ص و هى

[$ص = ٧ + س$ ، $ص = ٧ - س$ ،

$ص = ٣س + ١$ ، $ص = ٣س + ١$]

التمثيل البياني للعلاقة بين متغيرين

العلاقة : $p = s + b$ حيث : $p \neq 0$ ، $b \neq 0$.
تسمى علاقة خطية بين المتغيرين s ، v و يمثلها بيانياً خط مستقيم
فمثلاً :

لتمثيل العلاقة : $3s = v + 2$ بيانياً
نوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق هذه العلاقة كما سبق و يمكن وضعها
في جدول كالتالي :

| | | | |
|---|---|-----|-----|
| س | ٠ | ١ | ١ - |
| ص | ٢ | ١ - | ٠ |

و نعين في النظام
الإحداثي المتعامد النقط
التي تمثل الأزواج
المرتبة : $(٢, ٠)$ ،
 $(١ - , ١)$ ،
 $(٠ , ١ -)$

ونرسم الخط المستقيم
المر بها فيكون هو
التمثيل البياني لهذه
العلاقة

(الخط المستقيم باللون
الأزرق يمثل العلاقة)
لاحظ أن :

جميع نقط المستقيم الممثل
للعلاقة تعين أزواج مرتبة تحقق هذه العلاقة

أحمد الشنتوي

حالات خاصة :

(١) إذا كان : $p = 0$.

فتصبح العلاقة على الصورة :

$$b = v$$

فمثلاً :

$$العلاقة : 3 = v$$

$$أي : v = \frac{3}{4}$$

يمثلها الخط المستقيم باللون الأحمر

و هو يمر بالنقطة $(\frac{3}{4}, ٠)$

و يكون موازياً لمحور السينات

ملاحظة : العلاقة : $v = 0$. يمثلها محور السينات

(٢) إذا كان : $b = 0$.

فتصبح العلاقة على الصورة :

$$p = s$$

فمثلاً :

$$العلاقة : 1 - = s$$

$$أي : s = 1 - \frac{1}{4}$$

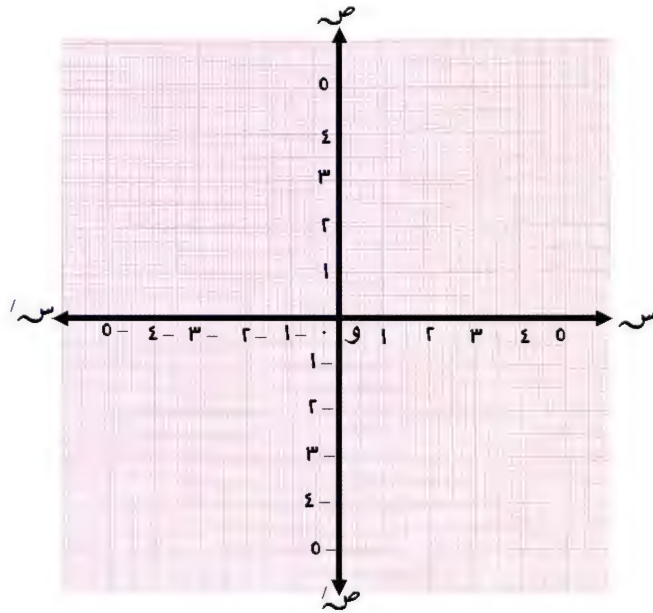
يمثلها الخط المستقيم باللون الأخضر

و هو يمر بالنقطة $(٠, 1 - \frac{1}{4})$

و يكون موازياً لمحور الصادات

ملاحظة : العلاقة : $s = 0$. يمثلها محور الصادات

أحمد الشنتوي



أحمد الشنتوي

ملاحظات :

(١) يمكن تكوين الجدول مباشرة

(٢) يمكن إيجاد نقطة تقاطع المستقيم الممثل للعلاقة :

 m س + ب ص = ح مع محور السينات بوضع : ص = .

، و مع محور الصادات بوضع : س = .

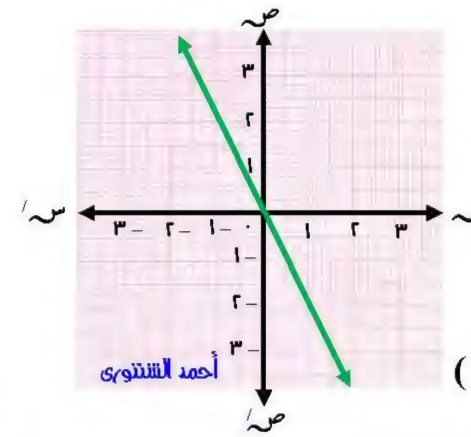
فمثلاً : العلاقة : $2س + 3ص = 6$ بوضع : ص = . ينتج : $3س = 6$

∴ نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي (٣ ، ٠)

بوضع : س = . ينتج : $2 = 3ص$

∴ نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي (٠ ، ٢)

أحمد الشنتوي



(٣) إذا كان : ح = .

فتصبح العلاقة على الصورة :

 m س + ب ص = .

فمثلاً :

العلاقة : $2س + 3ص = 6$ أي : ص = $2 - 3س$

يمثلها الخط المستقيم باللون البنّي

و هو يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

كما بالشكل المقابل :

| | | | |
|---|---|----|----|
| س | ٠ | ١ | -١ |
| ص | ٠ | -٢ | ٢ |

(٦) مثل بيانياً العلاقة : $3س = 2ص - ٦$ ∴ $3س = 2ص - ٦$

بوضع س =

∴ (.... ،) يحقق العلاقة

∴ ص =

∴ $3س = 2ص - ٦$

بوضع س =

∴ (.... ،) يحقق العلاقة

∴ ص =

∴ $3س = 2ص - ٦$

بوضع س =

∴ (.... ،) يحقق العلاقة

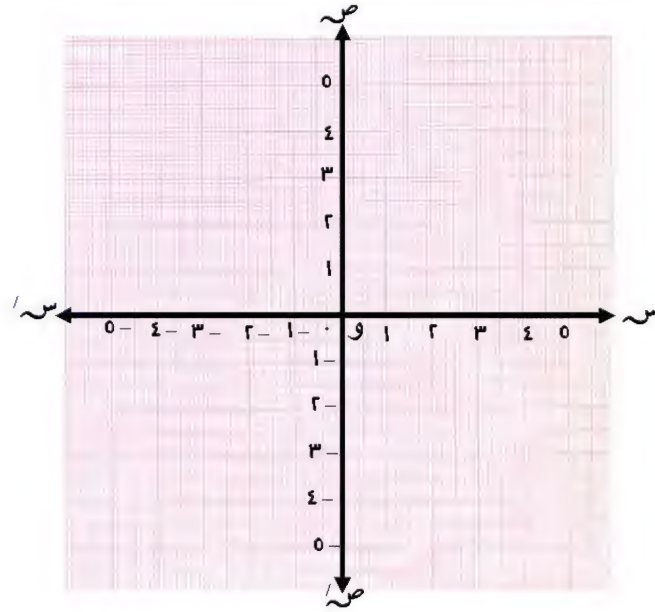
∴ ص =

| | | | |
|---|--|--|--|
| س | | | |
| ص | | | |

أحمد الشنتوي

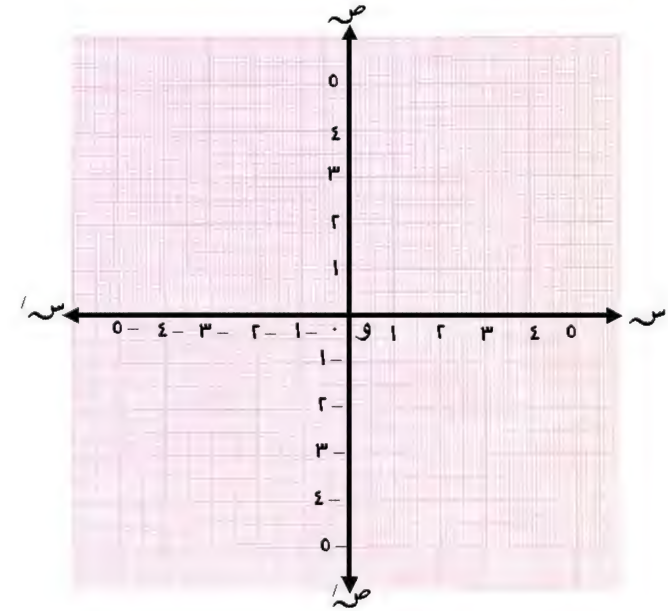
(٩) ارسم المستقيم الممثل للعلاقة : $٢س + ٣ص = ٦$ ، و إذا كان هذا المستقيم يقطع محور السينات في النقطة ٦ ، و يقطع محور الصادات في النقطة $ب$ ، أوجد مساحة المثلث و ٦ ب حيث (و) نقطة الأصل

| | | | |
|---|------|------|------|
| س | . | | |
| ص | | . | |



(٧) أوجد نقط تقاطع المستقيم : $٢س - ص = ٤$ مع محوري الإحداثيات ثم أرسم هذا المستقيم

| | | | |
|---|------|------|------|
| س | . | | |
| ص | | . | |



(٨) إذا كان المستقيم الممثل للعلاقة : $٢س - ص = ٤$ يقطع محور السينات في النقطة (٢ ، ٣) أوجد قيمة كل من : ٢ ، ٣

الدرس الثاني : ميل الخط المستقيم و تطبيقات حياتية

تمهيد :

إذا تحركت نقطة على خط مستقيم
ل من الموضع م (س_١ ، ص_١)
إلى الموضع ب (س_٢ ، ص_٢)
حيث : س_٢ < س_١ ، و كل من
م ، ب ∈ المستقيم ل فإن :
(١) التغير في الإحداثي السيني

$$= س_٢ - س_١$$

و يسمى بالتغير الأفقي

(٢) التغير في الإحداثي الصادي = ص_٢ - ص_١

و يسمى بالتغير الرأسى

(من الممكن أن يكون موجباً أو سالباً أو مساوياً للصفر)

(٣) النسبة بين التغير في الإحداثي الصادي و التغير في الإحداثي السيني

تسمى ميل الخط المستقيم و يرمز له بالرمز (م)

مما سبق نستنتج :

$$\text{ميل الخط المستقيم} = \frac{\text{التغير في الإحداثي الصادي}}{\text{التغير في الإحداثي السيني}} = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$$

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} \quad \text{حيث : } س_٢ < س_١$$

الحالات المختلفة للتغير الرأسى (ص_٢ - ص_١) :

(١) إذا كانت : م (٢ ، ١) ،

ب (٣ ، ٤) فإن :

$$\text{ميل } \vec{MB} = \frac{٢ - ٣}{١ - ٤} = \frac{١}{٣}$$

نلاحظ :

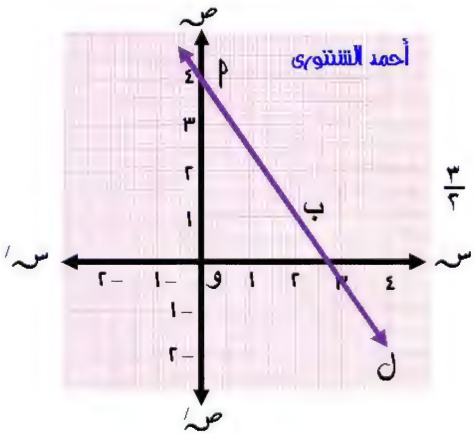
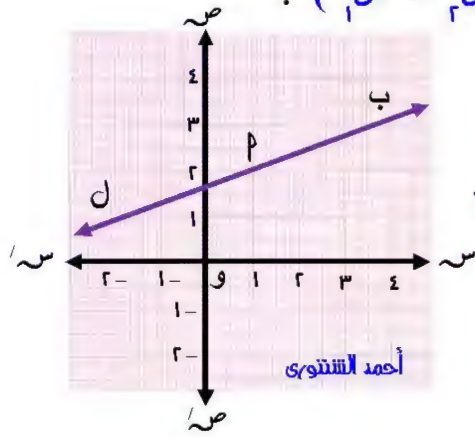
(١) تحركت نقطة م على

الخط المستقيم لأعلى

لتصل إلى نقطة ب

(٢) ص_٢ < ص_١ أى أن : ص تزداد بزيادة س

(٣) ميل المستقيم = عدد موجب (م > ٠)



(٢) إذا كانت : م (٤ ، ٠) ،

ب (١ ، ٢) فإن :

$$\text{ميل } \vec{MB} = \frac{٤ - ١}{٠ - ٢} = -\frac{٣}{٢}$$

نلاحظ :

(١) تحركت نقطة م على

الخط المستقيم لأسفل

لتصل إلى نقطة ب

(٢) ص_٢ > ص_١ أى أن : ص تقل بزيادة س

(٣) ميل المستقيم = عدد سالب (م < ٠)

(١) أوجد ميل الخط المستقيم المار بكل نقطتين مما يلي :

[١] $P(1, 1)$ ، $B(2, 4)$

[٢] $P(3, -5)$ ، $B(6, -5)$

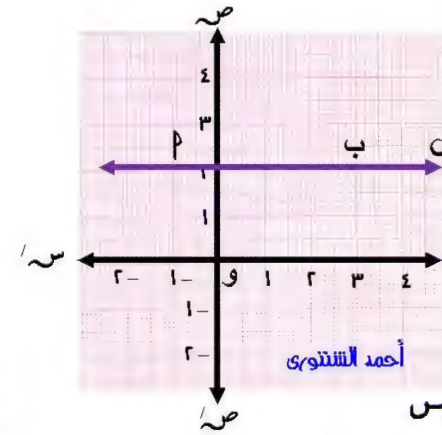
[٣] $P(2, -2)$ ، نقطة الأصل

[٤] $P(-1, 3)$ ، $B(-2, 4)$

[٣] إذا كانت : $P(-1, 2)$ ،

$B(3, 2)$ فإن :

$$\text{ميل } \overrightarrow{PB} = \frac{2-2}{(1-)-3} = \frac{0}{-4} = 0 = \text{صفر}$$



نلاحظ : (١) تحركت نقطة P أفقياً لتصل إلى نقطة B

(٢) $s_1 = s_2$

أي أن : s ثابتة بتغير s

(٣) ميل المستقيم $= 0$ ($2 = 0$)

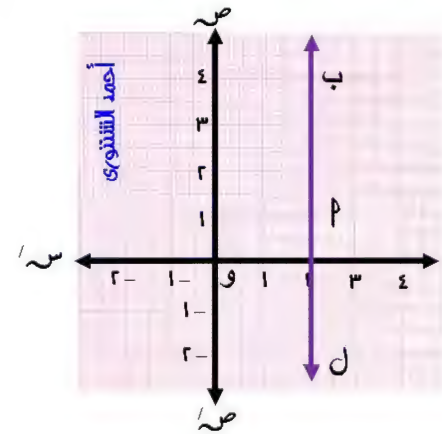
أي أن : ميل المستقيم الموازي لمحور السينات $= 0$

[٤] إذا كانت : $P(2, 1)$ ،

$B(2, 4)$ فإن :

لا يمكن حساب الميل لأن تعريف الميل يشترط وجود تغير في الإحداثي السيني

أي : $s_1 - s_2 \neq 0$



نلاحظ : (١) تحركت نقطة P رأسياً لتصل إلى نقطة B

(٢) $s_1 = s_2$

(٣) ميل المستقيم غير معرف

أي أن : ميل المستقيم الموازي لمحور الصادات غير معرف

(٢) إذا كان : ميل المستقيم المار بالنقطتين $(-1, 1)$ ، $(6, 6)$ ،
يساوي 0 أوجد قيمة : س

(٤) إذا كان : ميل المستقيم المار بالنقط $(3, -1)$ ، $(1, 6)$ ،
(٩، ص) يساوي $\frac{2}{3}$ أوجد قيمة كل من : س ، ص

أحمد الشنتوري

(٣) إذا كان : ميل المستقيم المار بالنقطتين $(1, 1)$ ، $(0, -1)$ ،
يساوي $\frac{3}{4}$ أوجد قيمة : ص

(٥) إذا كان : $\vec{p} (2, -1)$ ، $\vec{b} (3, 2)$ ، $\vec{d} (4, 0)$ أوجد ميل كل
من \vec{p} ، \vec{b} ، \vec{d} ، ثم أذكر ماذا تلاحظ ؟

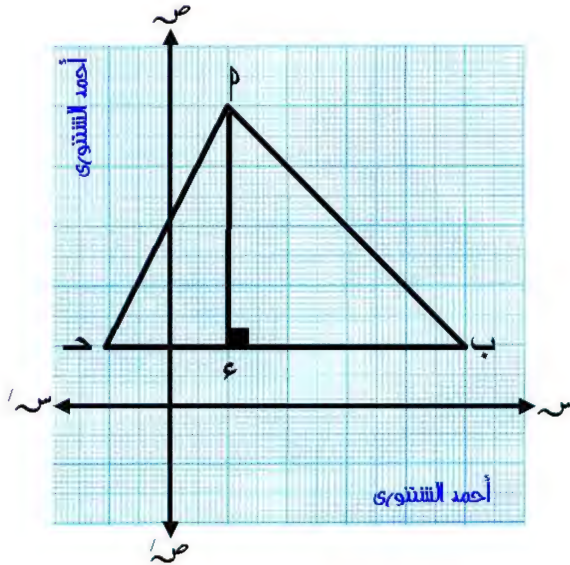


(٦) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين $(٢, ٤)$ ، $(٣, ٧)$ يوازي محور السينات أوجد قيمة : ٧

(٨) أوجد ميل المستقيم \vec{AB} حيث : $A(-١, ٣)$ ، $B(٢, ٥)$ ثم بين ما إذا كانت النقطة $C(٨, ١٠)$ تقع على \vec{AB} أم لا ؟

أحمد الشنتوري

(٧) أثبت أن ميل المستقيم المار بالنقطتين $(١, ١)$ ، $(٢, ١)$ يساوي ميل المستقيم المار بالنقطتين $(٣, ٣)$ ، $(٢, ٧)$



(٩) في الشكل المقابل :
 \vec{AB} د مثلث ، أكمل
 باستخدام أحد الكلمات :
 (موجب ، سالب ،
 صفر ، غير معرف)

[١] ميل \vec{AB}

[٢] ميل \vec{BC}

[٣] ميل \vec{AC}

[٤] ميل \vec{AB}

تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم :
نعلم أن :

إذا كانت هناك علاقة خطية بين متغيرين س ، ص فإن :

ميل الخط المستقيم الذي يمثل هذه العلاقة = $\frac{\text{التغير في الإحداثي الصادي}}{\text{التغير في الإحداثي السيني}}$

أي أن : ميل الخط المستقيم (م) يعبر عن معدل التغير في ص بالنسبة إلى س

و يوجد في حياتنا العديد من التطبيقات الحياتية كتطبيق على العلاقة بين متغيرين و التي نحتاج فيها لمعرفة معدل التغير مثل :
التغير في حركة سيارة أو دراجة - التغير في استهلاك الوقود -
التغير في رأس مال إحدى الشركات الخ

تطبيق (١) : الشكل المقابل

يوضح تغير رأس مال شركة خلال ٦ سنوات و منه نلاحظ :

(١) $P = (٢٠, ٠)$ ، $B = (٤٠, ٢)$

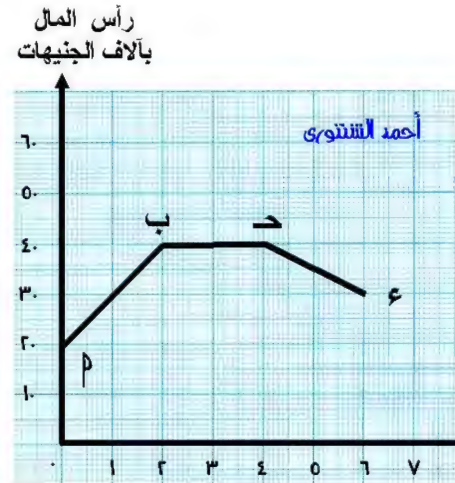
، $C = (٤٠, ٤)$ ، $E = (٣٠, ٦)$

(٢) ميل $\vec{PB} = \frac{٢٠ - ٤٠}{٠ - ٢} = ١٠$

و هو يعبر عن تزايد رأس مال الشركة خلال أول

سنتين بمعدل ١٠ آلاف جنيه

(أي : ١٠ آلاف جنيه لكل سنة)



(٣) ميل $\vec{BC} = \frac{٤٠ - ٤٠}{٢ - ٤} = ٠$ صفر و هو يعنى أن رأس مال الشركة

كان ثابتاً خلال السنتين الثالثة و الرابعة

(٤) ميل $\vec{CE} = \frac{٤٠ - ٣٠}{٤ - ٦} = ٥$ و هو يعبر عن تناقص رأس مال

الشركة خلال السنتين الأخيرتين بمعدل ٥ آلاف جنيه

(أي : ٥ آلاف جنيه لكل سنة)

(٥) رأس مال الشركة عند بدء العمل = الإحداثي الصادي عند P

= ٢٠ ألف جنيه

ملاحظات :

(١) إذا كان : الميل موجب فإن : معدل التغير يتزايد

(٢) إذا كان : الميل سالب فإن : معدل التغير يتناقص

(٣) إذا كان : الميل = صفر فإن : معدل التغير ثابت

(٤) تمثل العلاقة بين المتغيرين في الربع الأول على الشبكة التربيعية المتعامدة

(٥) إذا كان الميل موجب و قطع المستقيم محور الصادات في النقطة

(. ، ص) فإن : ص تعبر عن القيمة الابتدائية (الصغرى) للمتغير ص

(٦) إذا كان الميل سالب و قطع المستقيم محور الصادات في النقطة

(. ، ص) فإن : ص تعبر عن القيمة النهائية (العظمى) للمتغير ص

[٤] القطعة المستقيمة الأفقية تبين توقف الدراجة لمدة ساعة بعد أن

تحركت مسافة ٥٠ كم ، ثم تبدأ رحلة العودة

[٥] المسافة الكلية = ١٠٠ كم ، و الزمن الكلي = ١٠ ث

[٦] السرعة المتوسطة للدراجة خلال الرحلة كلها = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلي}}$

$$= \frac{100}{10} = 10 \text{ كم / س}$$

ملاحظات :

(١) إذا كانت السيارة أو الدراجة أو تقطع مسافات متساوية في

أزمنة متساوية فإنها تتحرك بسرعة منتظمة و الذي يحددها ميل

المستقيم الذي يمثل العلاقة بين السرعة و الزمن أي أن :

السرعة المنتظمة للسيارة (ع) = معدل التغير في المسافة (ف)

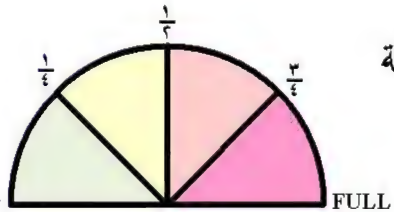
بالنسبة للزمن (س) = ميل المستقيم (٣)

، و إذا كانت هذه العلاقة لا تمثل خط مستقيم واحد بل عدة قطع

مستقيمة فإن :

$$\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلي}} = \text{السرعة المتوسطة}$$

تطبيق (٣) :



ملأ شخص خزان سيارته بالوقود و سعة

هذا الخزان ٤٠ لتراً و بعد أن تحرك

١٢٠ كم وجد أن المؤشر يوضح أن

المتبقى $\frac{3}{4}$ الخزان

لرسم الشكل البياني الذي يوضح العلاقة بين كمية الوقود بالخزان و

المسافة التي قطعها السيارة

(٧) إذا كان الميل موجب و قطع المستقيم محور السينات في النقطة

(س ، ٠) فإن : س تعبر عن القيمة الابتدائية (الصغرى)

للمتغير س

(٨) إذا كان الميل سالب و قطع المستقيم محور السينات في النقطة

(س ، ٠) فإن : س تعبر عن القيمة النهائية (العظمى)

للمتغير س

تطبيق (٢) : الشكل المقابل :

يوضح حركة دراجة حيث الزمن س

بالساعة ، و المسافة ف بالكيلو متر

بين مدينتين ذهاباً و عودة

و منه نلاحظ :

$$[١] \quad \text{ب} = (٠, ٤) , \text{ع} = (٥, ٤)$$

$$\text{د} = (٥, ٦) , \text{هـ} = (٥, ١٠)$$

$$\text{و} = (٠, ١٠)$$

[٢] السرعة المنتظمة للدراجة خلال رحلة الذهاب = ميل $\overrightarrow{\text{د ب}}$

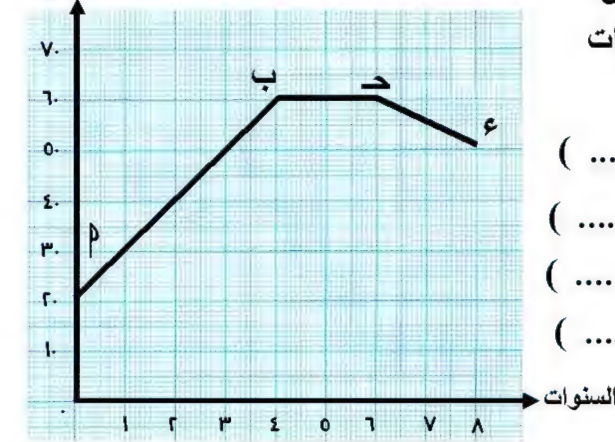
$$= \frac{0 - 4}{5 - 0} = -0,8 \text{ كم / س}$$

[٣] السرعة المنتظمة للدراجة خلال رحلة العودة = ميل $\overrightarrow{\text{هـ د}}$

$$= \frac{0 - 10}{5 - 0} = -2 \text{ كم / س}$$

و الإشارة السالبة تعني أن الدراجة تتحرك في عكس اتجاه حركتها

الأولى بسرعة ١٠ كم / س

رأس المال
بآلاف الجنيهاً

(١) الشكل المقابل :

يوضح تغير رأس مال
شركة خلال ٨ سنوات
أكمل ما يلي :

$$P = (\dots , \dots)$$

$$B = (\dots , \dots)$$

$$C = (\dots , \dots)$$

$$E = (\dots , \dots)$$

$$[2] \text{ ميل } \overrightarrow{PB} = \dots$$

$$\dots = \frac{\dots - \dots}{\dots - \dots}$$

و هو يعبر عن

$$[3] \text{ ميل } \overrightarrow{BC} = \dots = \frac{\dots - \dots}{\dots - \dots}$$

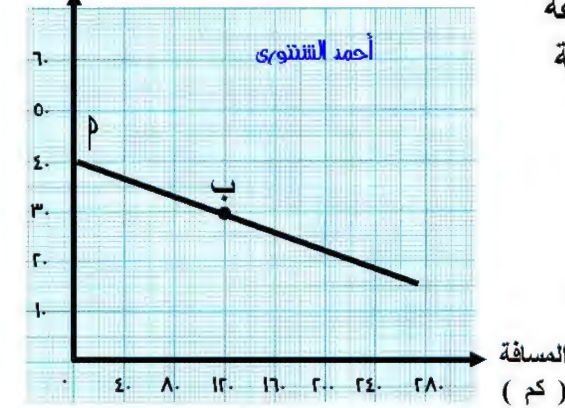
و هو يعبر عن

$$[4] \text{ ميل } \overrightarrow{CE} = \dots = \frac{\dots - \dots}{\dots - \dots}$$

و هو يعبر عن

[5] رأس مال الشركة عند بدء العمل = الإحداثي الصادي عند

= ألف جنيه

كمية الوقود
(لتر)

حيث العلاقة خطية نلاحظ أن :

(١) عند البدء : $P = (0, 4)$

أي أن : المسافة المقطوعة

(ف) = . كم ، و كمية

الوقود المتبقية = ٤ لتر

(٢) بعد قطع مسافة ١٢ كم

: $B = (12, 3)$

أي أن : ف = ١٢ كم

، و كمية الوقود

المتبقية = ٣ لتر

$$\text{و يكون : ميل } \overrightarrow{PB} = \frac{4 - 3}{0 - 12} = -\frac{1}{12}$$

و هذا يعني أن كمية الوقود تتناقص بمعدل لتر واحد كل ١٢ ساعة

(٣) يفرغ الخزان عندما تقطع السيارة مسافة = $\frac{\text{كمية الوقود}}{\text{معدل النقص}}$

$$= \frac{4}{\frac{1}{12}} = 48 \text{ كم}$$

، \overrightarrow{PB} يقطع المحور الأفقي (محور المسافة) في النقطة $(0, 48)$

(٣) ملأ محمد خزان سيارته بالوقود الشكل المقابل يمثل العلاقة بين العلاقة بين الزمن بالساعة و كمية الوقود المتبقية بالتر
أكمل ما يلي :



[١] أكبر سعة للخزان = لتر

[٢] يفرغ الخزان بعد مرور

.... ساعة

[٣] بعد مرور ١٥ ساعة

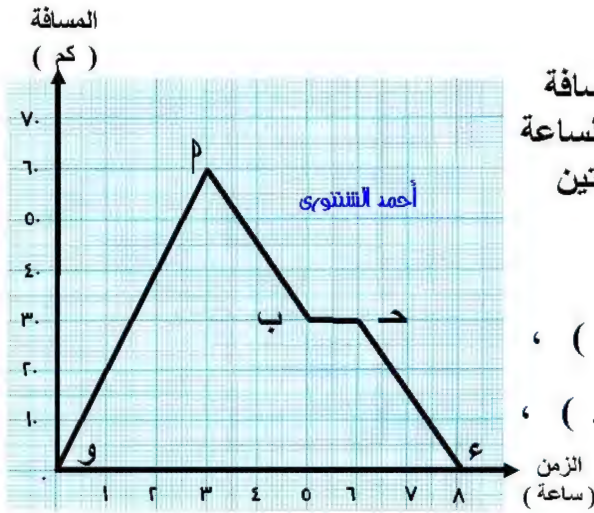
يتبقى بالخزان لتر (ساعة)

[٤] يتبقى بالخزان ١٠ لتر بعد مرور ساعة

[٥] $P = (....,)$ ، $B = (....,)$

[٦] ميل $\overrightarrow{PB} = \frac{.... -}{.... -} =$

[٧] معدل استهلاك الوقود في الساعة الواحدة = لتر / ساعة



(٢) الشكل المقابل :

يوضح العلاقة بين المسافة بالكيلومتر و الزمن بالساعة لحركة سيارة بين مدينتين ذهاباً و عودة
أكمل ما يلي :

[١] $P = (....,)$ ،

$B = (....,)$ ،

$C = (....,)$ ،

$E = (....,)$

[٢] السرعة المنتظمة للسيارة خلال رحلة الذهاب = ميل \overrightarrow{PB}

$$= \frac{.... -}{.... -} = \text{ كم / س}$$

[٣] المسافة الكلية خلال رحلة العودة = كم

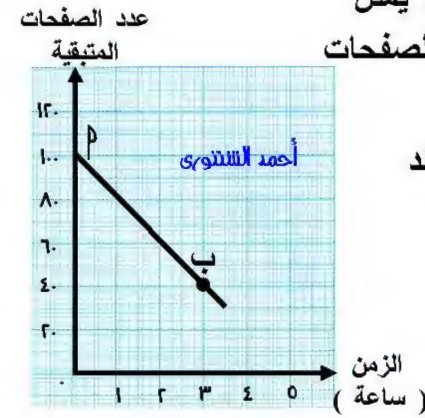
[٤] الزمن الكلي خلال رحلة العودة = ساعة

[٥] سرعة المتوسطة للسيارة خلال رحلة العودة = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلي}}$

$$= \frac{....}{....} = \text{ كم / س}$$

[٦] القطعة المستقيمة الأفقية بالشكل تدل على

(٤) تقرأ سهير كتاب ، و الشكل المقابل يمثل العلاقة بين الزمن بالساعة و عدد الصفحات المتبقية أكمل ما يلي :



[١] عدد صفحات الكتاب المتبقية عند

بداية القراءة = صفحة

[٢] $P = (....,)$ ،

$B = (....,)$

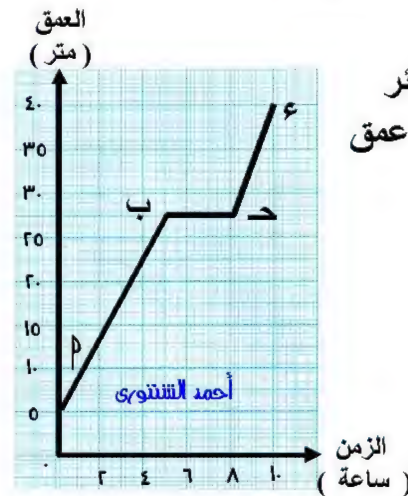
[٣] ميل $\overrightarrow{PB} = \frac{.... -}{.... -} = \frac{....}{....}$

[٤] معدل الصفحات المقرؤة في الساعة الواحدة = صفحة / ساعة

و يعنى

[٥] تنهى سهير قراءة الكتاب بعد ساعات

(٥) أستاذ مزارع حفاراً ليستكمل حفر بئر و الشكل المقابل يوضح العلاقة بين عمق البئر بالمتري و الزمن بالساعة أكمل ما يلي :



[١] $P = (....,)$ ،

$B = (....,)$ ،

$C = (....,)$ ،

$E = (....,)$

أحمد الشنتوي

[٢] عمق البئر قبل بدء عمل الحفار = متر

[٣] عمق البئر بعد انتهاء عمل الحفار = متر

[٣] الزمن الكلى الذى أستغرقه الحفار فى الحفر = ساعات

[٤] ميل $\overrightarrow{PB} = \frac{.... -}{.... -} = \frac{....}{....}$

[٨] متوسط العمق الذى يحفره الحفار فى الخمس ساعات الأولى

= متر / ساعة

[٦] ميل $\overrightarrow{CE} = \frac{.... -}{.... -} = \frac{....}{....}$

[٧] متوسط العمق الذى يحفره الحفار فى الساعتين الأخيرتين

= متر / ساعة

(٦) قرأ شخص جزءاً من كتاب عدد صفحاته ٦٠ صفحة فإذا كانت العلاقة

التي تربط عدد الصفحات المتبقية (ص) ، و الزمن اللازم لقراءتها

(ن) بالدقيقة تتعين بالعلاقة : $ص = ٣٠ - \frac{١}{٢}ن$

أكمل ما يلي :

[١] عدد الصفحات التي سبق لهذا الشخص قراءتها = صفحة

[٢] الزمن اللازم لقراءة بقية الصفحات = دقيقة

أحمد الشنتوي

الوحدة الثالثة

الإحصاء

الدرس الأول : جمع البيانات و تنظيمها

نعم أن :

البيانات الإحصائية حول ظاهرة ما تنقسم إلى نوعين رئيسيين هما :

(١) بيانات وصفية : هي بيانات تكتب في صورة صفات مثل :

مكان الميلاد ، الحالة الاجتماعية ، اللون المفضل ، إلخ

(٢) بيانات كمية : هي بيانات تكتب في صورة أعداد مثل :

العمر ، الطول ، الوزن ، عدد الأبناء ، إلخ

جمع البيانات :

تجمع البيانات في صورة :

(١) بيانات ابتدائية : عن طريق استبيان أو كشوف ملاحظة

(٢) بيانات ثانوية : عن طريق مصادر مثل النشرات أو الكتب أو

الأنترنت أو الوثائق

(٣) بيانات تجريبية : عن طريق التجارب لأختبار صحة نظرية ما

تنظيم و تحليل البيانات :

لعرض مجموعة من البيانات يلزم تنظيم عرضها بطريقة تساعد على

الإلمام بها و الاستفادة منها لذا يتم ترتيب البيانات و تنظيمها في جداول

لتتضح طبيعتها و ليسهل استنتاج المعلومات و من هذه الجداول :

الجدول التكراري البسيط :

يستخدم لعرض الأعداد الصغيرة و البسيطة

تتضح خطوات تكوين جدول تكراري بسيط من خلال المثال التالي :

في بداية العام الدراسي أستطلع معلم قصل به ٣٥ تلميذ بإحدى المدارس رأى متعلمي هذا الصف بالمدرسة عن الأنشطة المدرسية التي يفضلون الإنضمام إليها فكانت البيانات على النحو التالي :

| | | | | | | |
|---------|---------|-------|---------|---------|---------|---------|
| رياضي | ثقافي | رياضي | اجتماعي | فني | رياضي | اجتماعي |
| رياضي | اجتماعي | فني | ثقافي | رياضي | اجتماعي | فني |
| اجتماعي | فني | رياضي | اجتماعي | رياضي | رياضي | اجتماعي |
| فني | رياضي | رياضي | ثقافي | اجتماعي | فني | رياضي |
| ثقافي | ثقافي | رياضي | فني | رياضي | اجتماعي | فني |

لكي يتم حصر هذه البيانات أو تجميعها نستخدم جدول تفريغ بيانات تكراري كالتالي :

| النشاط | العلامات | التكرارات |
|---------|-----------|-----------|
| رياضي | /// IIII | ١٣ |
| اجتماعي | IIII IIII | ٩ |
| فني | I IIII | ٨ |
| ثقافي | IIII | ٥ |
| المجموع | | ٣٥ |

و باستبعاد عمود العلامات من جدول تفريغ البيانات التكراري نحصل على (جدول التوزيع التكراري البسيط) و هو كما يلي :

| النشاط | رياضي | اجتماعي | فني | ثقافي | المجموع |
|--------------|-------|---------|-----|-------|---------|
| عدد التلاميذ | ١٣ | ٩ | ٨ | ٥ | ٣٥ |

أى أن : كل مجموعة تحتوى على ٥ أعداد

(٣) تصبح المجموعات الجزئية كما يلي :

المجموعة الأولى : تحتوى الدرجات من ٢ حتى أقل من ٧
ويعبر عنها : ٢ -

المجموعة الثانية : تحتوى الدرجات من ٧ حتى أقل من ١٢
ويعبر عنها : ٧ - ، وهكذا

(٤) تفرغ البيانات فى جدول تفرغ بيانات تكرارى كما يلي :

| المجموعات | العلامات | التكرار |
|--------------|------------------------------------|---------|
| ٢ - | // | ٢ |
| ٧ - | //// | ٤ |
| ١٢ - | //// //// | ٩ |
| ١٧ - | // //// //// | ١٢ |
| ٢٢ - | /// | ٣ |
| أحمد الشنتوي | المجموع | ٣٠ |

(٥) و باستبعاد عمود العلامات من جدول تفرغ البيانات التكرارى

نحصل على : (الجدول التكرارى ذى المجموعات)
و هو كما يلي :

| المجموعات | ٢ - | ٧ - | ١٢ - | ١٧ - | ٢٢ - | المجموع |
|-----------|-----|-----|------|------|------|---------|
| التكرار | ٢ | ٤ | ٩ | ١٢ | ٣ | ٣٠ |

و لكن فى احيان كثيرة تكون البيانات الإحصائية أعداد كبيرة مثل
أجور موظفى إحدى الوزارات ، ودرجات طلاب شهادة الثانوية العامة
لذلك فإن تبويب مثل هذه البيانات فى جدول تكرارية بسيط يجعله كبيراً
جداً و طويلاً و غير مجد لمعرفة و استنتاج أى معلومات
لذلك نلجأ إلى الجدول التكرارى ذى المجموعات

تنظيم البيانات و عرضها فى جداول تكرارية :

تتضح خطوات تكوين جدول تكرارى ذى مجموعات من خلال
المثال التالى :

فيما يلي بيان بالدرجات التى حصل عليها ٣٠ طالباً فى إحدى الاختبارات

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| ٢٠ | ١٥ | ٥ | ١٦ | ٢٢ | ١٠ | ١٩ | ٢٤ | ١٧ | ١٣ |
| ١٤ | ٢٣ | ١٨ | ٤ | ١٩ | ٢١ | ٩ | ١٩ | ٧ | ٢٠ |
| ٨ | ١٦ | ٢٠ | ٢١ | ١٤ | ١٣ | ٢٢ | ١٣ | ٢٠ | ١٦ |

لتكوين الجدول التكرارى ذى المجموعات نتبع الخطوات التالية :

(١) تحديد أكبر قيمة و أصغر قيمة :

نجد : أكبر قيمة = ٢٤ ، و أصغر قيمة = ٢

أى : إذا اعتبرنا أن مجموعة هذه البيانات هى سـ

فإن : سـ = { س : ٢ ≤ س ≤ ٢٤ }

أى أن : قيم سـ تبدأ من ٢ و تنتهى عند ٢٤

و بالتالى فإن : المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة = ٢٢ = ٢٤ - ٢

(٢) نجزئ المجموعة سـ إلى عدد من المجموعات الجزئية و المتساوية

المدى و ليكن ٥ مجموعات

$$\therefore \text{مدى المجموعة} = \frac{22}{5} = 4 \frac{2}{5} \approx 4$$

(١) البيانات التالية تبين أوزان ٤٠ طفل بالكيلو جرامات

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| ٤٣ | ٣٣ | ٣١ | ١٥ | ٤٤ | ٢٤ | ٣٤ | ٣٩ | ٢٧ | ٣٨ |
| ٤٢ | ٢٥ | ٢٩ | ٢١ | ٢٩ | ٣٠ | ٣٣ | ٢٦ | ٣٣ | ٣٧ |
| ٤٠ | ٢٦ | ٣٢ | ٢١ | ٢٥ | ٣٠ | ٣٦ | ٣٢ | ٢٣ | ٣٦ |
| ٢٩ | ٣٥ | ٢٧ | ٣٤ | ٢٨ | ٢٢ | ٣١ | ١٩ | ٢٨ | ٣١ |

[١] أكمل :

(١) أكبر قيمة = (٢) أصغر قيمة =

(٣) المدى = - =

(٤) ليكن عدد المجموعات = ٦ مجموعات

يكون : المدى = $\frac{\text{أقصى قيمة} - \text{أدنى قيمة}}{\text{عدد المجموعات}}$ =

[٢] كون جدول تفريغ بيانات تكراري لهذه البيانات

| المجموعات | العلامات | التكرار |
|-----------|----------|--------------|
| - ١٥ | | |
| - ٢٠ | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| المجموع | | أحمد الشنتوي |

[٣] كون جدول تكراري ذي مجموعات لهذه البيانات

| | | | | | | | |
|-----------|------|------|--|--|--|--|---------|
| المجموعات | - ١٥ | - ٢٠ | | | | | المجموع |
| التكرار | | | | | | | |

[٤] عدد الأطفال الذين تقل أوزانهم عن ٢٥ كجم = طفل

[٥] عدد الأطفال الذين أوزانهم ٢٥ كجم فأكثر = طفل

(٢) البيانات التالية تبين عدد التلاميذ المترددين على مكتبة مشتركة في مشروع (القراءة للجميع) خلال ٣٠ يوماً

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| ٤٠ | ٤٦ | ٣٢ | ٣٦ | ٣٨ | ٣٠ | ٤٧ | ٣٨ | ٤٢ | ٣٣ |
| ٢٠ | ٣٤ | ٣٥ | ٤٨ | ٥٠ | ٢٧ | ٤٣ | ٢٧ | ٣٥ | ٣٤ |
| ٣٩ | ٢٤ | ٢٢ | ٤٢ | ٥٠ | ٤٤ | ٤٠ | ٣٨ | ٢٤ | ٢٨ |

[١] أكمل :

(١) أكبر قيمة =

(٢) أصغر قيمة =

(٣) المدى = - =

[٢] كون جدول تكراري ذي مجموعات لهذه البيانات بحيث تكون

مجموعاته متساوية الطول و طول كل منها ٥ تلاميذ

| المجموعات | العلامات | التكرار |
|-----------|----------|---------|
| ٢٠ - | | |
| ٢٥ - | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| المجموع | | |

| المجموعات | ٢٠ - | ٢٥ - | | | | المجموع |
|-----------|------|------|--|--|--|---------|
| التكرار | | | | | | |

(٣) فيما يلى الأجر الأسبوعى لأربعين عاملاً فى أحد المصانع

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| ٥٧ | ٨٩ | ٣٦ | ٩٤ | ٦٤ | ٥٤ | ٥٤ | ٧١ | ٦٢ | ٤٧ |
| ٥١ | ٦١ | ٤٤ | ٥٢ | ٧٠ | ٦٦ | ٥٦ | ٣٦ | ٦٩ | ٣٢ |
| ٩٩ | ٤٨ | ٦٧ | ٩٠ | ٥٥ | ٧٩ | ٩٦ | ٧٧ | ٦٠ | ٦٥ |
| ٥٩ | ٤٨ | ٩٤ | ٤٩ | ٣٨ | ٨٤ | ٧٨ | ٧٥ | ٩٥ | ٨١ |

كون جدول تكرارى ذى مجموعات متخذاً المجموعات الجزئية :
 (٣٠ - ، ٤٠ - ، ٥٠ - ، ، ٩٠ -) ثم حدد المجموعة
 التى بها أكبر تكرار ، و المجموعة التى بها أقل تكرار

| الحدود العليا للمجموعات | | | | | التكرار المتجمع الصاعد | | | | |
|-------------------------|--|--|--|--|------------------------|--|--|--|--|
| أقل من ١٠ | | | | | ٠ | | | | |
| أقل من ٢٠ | | | | | ٠ + ٤ = ٤ | | | | |
| أقل من ٣٠ | | | | | ٤ + ٨ = ١٢ | | | | |
| أقل من ٤٠ | | | | | ١٢ + ١٢ = ٢٤ | | | | |
| أقل من ٥٠ | | | | | ٢٤ + ١٠ = ٣٤ | | | | |
| أقل من ٦٠ | | | | | ٣٤ + ٦ = ٤٠ | | | | |

أى :

| جدول التكرار المتجمع الصاعد | |
|-----------------------------|------------------------|
| الحدود السفلى للمجموعات | التكرار المتجمع النازل |
| أقل من ١٠ | ٠ |
| أقل من ٢٠ | ٤ |
| أقل من ٣٠ | ١٢ |
| أقل من ٤٠ | ٢٤ |
| أقل من ٥٠ | ٣٤ |
| أقل من ٦٠ | ٤٠ |

الدرس الثانى : الجدول التكرارى المتجمع الصاعد و الجدول التكرارى المتجمع النازل و تمثيلهما بيانياً

هناك تساؤلات تحتاج الإجابة عنها إلى تنظيم البيانات بشكل منظم تتيح دراستها بطريقة سهلة و ذلك بوضعها فى جدول يسمى الجدول التكرارى المتجمع و فيه تجمع البيانات على التوالى من أحد طرفى الجدول إلى الطرف الآخر حتى نحصل على التكرار الكلى و هناك نوعان من الجدول التكرارى المتجمع هما :

أولاً : الجدول التكرارى المتجمع الصاعد وتمثيله بيانياً
فيه تجمع البيانات من جهة المجموعة الصغيرة إلى المجموعة الكبيرة كما بالمثال التالى :

الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٤٠ تلميذاً فى أحد الاختبارات

| المجموعات | ١٠ - | ٢٠ - | ٣٠ - | ٤٠ - | ٥٠ - | المجموع |
|-----------|------|------|------|------|------|---------|
| التكرار | ٤ | ٨ | ١٢ | ١٠ | ٦ | ٤٠ |

نكون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد كما بالخطوات التالية :

- (١) نكون جدول من عمودين
- (٢) العمود الأول للحدود العليا للمجموعات و نكتب فيه المجموعات من أول مجموعة إلى آخر مجموعة و نكتب قبل كل مجموعة (أقل من)
- (٣) العمود الثانى للتكرار المتجمع الصاعد و نبدأ ب (صفر) أمام أول مجموعة ثم نجمع التكرارات بالتتابع حتى نصل إلى مجموع التكرارات أمام آخر مجموعة فنحصل على :

ثانياً : الجدول التكراري المتجمع النازل وتمثيله بيانياً
فيه تجمع البيانات من جهة المجموعة الكبيرة إلى المجموعة الصغيرة
كما بالمثال التالي :
الجدول التالي يبين التوزيع التكراري لدرجات ٤. تلميذاً في أحد الاختبارات

| المجموعات | - ١٠ | - ٢٠ | - ٣٠ | - ٤٠ | - ٥٠ | المجموع |
|-----------|------|------|------|------|------|---------|
| التكرار | ٤ | ٨ | ١٢ | ١٠ | ٦ | ٤٠ |

نكون الجدول التكراري المتجمع الصاعد كما بالخطوات التالية :
(١) نكون جدول من عمودين

(٢) العمود الأول للحدود السفلى للمجموعات و نكتب فيه المجموعات
من أول مجموعة إلى آخر مجموعة و نكتب بعد كل مجموعة
(فأكثر)

(٣) العمود الثاني للتكرار المتجمع النازل و نبدأ بـ (صفر) أمام
آخر مجموعة ثم نجمع التكرارات بالتتابع حتى نصل إلى مجموع
التكرارات أمام أول مجموعة فنحصل على :

| الحدود العليا للمجموعات | التكرار المتجمع الصاعد | | | |
|-------------------------|------------------------|---|----|------|
| ١. فأكثر | ٣٦ | + | ٤ | = ٤٠ |
| ٢. فأكثر | ٢٨ | + | ٨ | = ٣٦ |
| ٣. فأكثر | ١٦ | + | ١٢ | = ٢٨ |
| ٤. فأكثر | ٦ | + | ١٠ | = ١٦ |
| ٥. فأكثر | ٠ | + | ٦ | = ٦ |
| ٦. فأكثر | | | | ٠ |

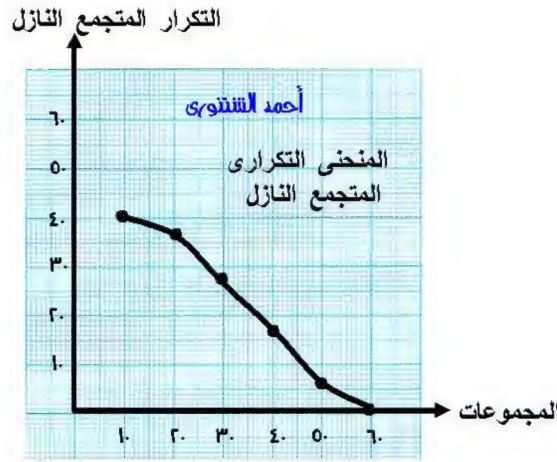
و لتمثيل الجدول التكراري المتجمع الصاعد نتبع الخطوات التالية :
(١) نخصص المحور الأفقي للمجموعات و المحور الرأسى للتكرار
المتجمع الصاعد
(٢) نختار مقياساً للرسم على المحور الرأسى بحيث يتسع المحور
للتكرار الكلى المتجمع الصاعد
(٣) نمثل التكرار المتجمع الصاعد لكل مجموعة و نرسم الخط البياني
لها بالتتابع
كما بالشكل التالي :



و نلاحظ :

- (١) لا يوجد تلاميذ تقل درجاتهم عن ١٠ درجات
- (٢) عدد التلاميذ الذين تقل درجاتهم عن ٣٠ درجات = ١٢ تلميذاً
- (٣) إذا كانت درجة النجاح هي ٣٠ درجة فإن :
عدد التلاميذ الراسبين = ١٢ تلميذاً

أى :



| جدول التكرار المتجمع النازل | |
|-----------------------------|------------------------|
| الحدود السفلى للمجموعات | التكرار المتجمع النازل |
| ١. فأكثر | ٤٠ |
| ٢. فأكثر | ٣٦ |
| ٣. فأكثر | ٢٨ |
| ٤. فأكثر | ١٦ |
| ٥. فأكثر | ٦ |
| ٦. فأكثر | ٠ |

و نلاحظ :

- (١) لا يوجد تلاميذ درجاتهم ٤. درجة فأكثر
- (٢) عدد التلاميذ الذين درجاتهم ٣. درجة فأكثر = ٢٨ تلميذاً
- (٣) إذا كانت درجة النجاح هي ٣. درجة فإن :
عدد التلاميذ الناجحين = ٢٨ تلميذاً

للامانة العلمية
يرجى عدم حذف أسمى نهائياً
يسمح فقط بإعادة النشر
دون أى تعديل

و لتمثيل الجدول التكرارى المتجمع الصاعد نتبع الخطوات التالية :

(١) نخصص المحور الأفقى للمجموعات و المحور الرأسى للتكرار المتجمع الصاعد

(٢) نختار مقياساً للرسم على المحور الرأسى بحيث يتسع المحور للتكرار الكلى المتجمع الصاعد

(٣) نمثل التكرار المتجمع الصاعد لكل مجموعة و نرسم الخط البياني لها بالتتابع
كما بالشكل التالى :

(٢) الجدول التالي يبين التوزيع التكراري لعدد ١٠٠ مصنع حسب ساعات العمل الأسبوعية

| المجموعات | - ٥٠ | - ٦٠ | - ٧٠ | - ٨٠ | - ٩٠ | - ١٠٠ | المجموع |
|-----------|------|------|------|------|------|-------|---------|
| التكرار | ٥ | ١٦ | ٣٠ | ٢٢ | ١٥ | ١٢ | ١٠٠ |

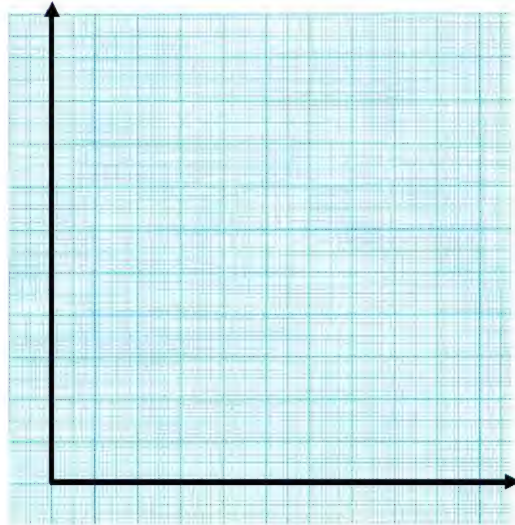
ارسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد ثم أوجد :

[١] عدد المصانع التي تعمل أقل من ٧٥ ساعة في الأسبوع =

[٢] النسبة المئوية لعدد المصانع التي تعمل أقل من ٧٥ ساعة

في الأسبوع =

| جدول التكرار المتجمع الصاعد | |
|-----------------------------|-------------------------|
| التكرار المتجمع الصاعد | الحدود العليا للمجموعات |
| | أقل من ٥٠ |
| | أقل من ٦٠ |
| | أقل من ٧٠ |
| | أقل من ٨٠ |
| | أقل من ٩٠ |
| | أقل من ١٠٠ |
| | أقل من ١١٠ |



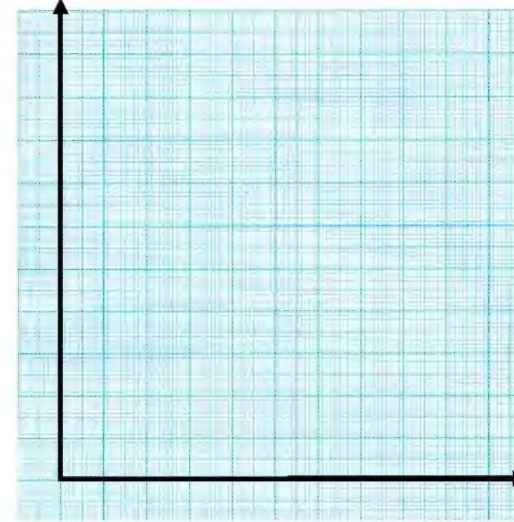
(١) الجدول التالي يبين التوزيع التكراري لأعمار ٦٠ عامل في أحد المصانع

| المجموعات | - ٢٥ | - ٣٠ | - ٣٥ | - ٤٠ | - ٤٥ | المجموع |
|-----------|------|------|------|------|------|---------|
| التكرار | ٣ | ١٠ | ١٩ | ٢٣ | ٥ | ٦٠ |

ارسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد ثم أوجد :

[١] عدد العمال الذين تقل أعمارهم عن ٤١ سنة =

| جدول التكرار المتجمع الصاعد | |
|-----------------------------|-------------------------|
| التكرار المتجمع الصاعد | الحدود العليا للمجموعات |
| | أقل من ٢٥ |
| | أقل من ٣٠ |
| | أقل من ٣٥ |
| | أقل من ٤٠ |
| | أقل من ٤٥ |
| | أقل من ٥٠ |



أحمد الشنتوي

(٤) الجدول التالي يبين التوزيع التكراري أوزان ٦٠ شخصاً بالكيلو جرام

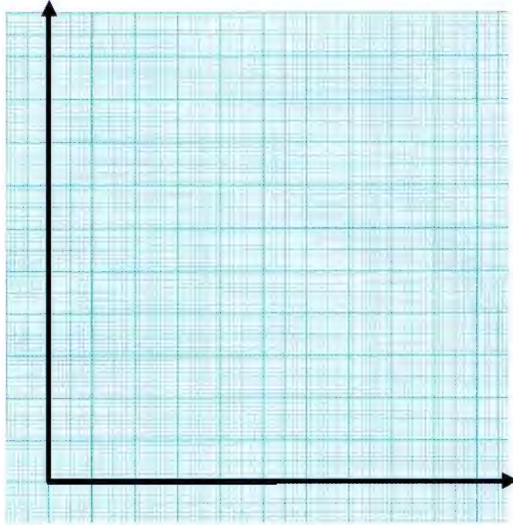
| المجموعات | - ٨٥ | - ٨٠ | - ٧٥ | - ٧٠ | - ٦٥ | - ٦٠ | - ٥٥ | المجموع |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|---------|
| التكرار | ٦٠ | ٢ | ٣ | ٧ | س | ١٨ | ١٢ | ٨ |

ارسم المنحنى التكراري المتجمع النازل ثم أوجد :

[١] س =

[٢] عدد الأشخاص الذين يزن كل منهم ٦٨ كجم فأكثر =

| الحدود السفلى للمجموعات | التكرار المتجمع النازل |
|-------------------------|------------------------|
| ٥٥ فأكثر | |
| ٦٠ فأكثر | |
| ٦٥ فأكثر | |
| ٧٠ فأكثر | |
| ٧٥ فأكثر | |
| ٨٠ فأكثر | |
| ٨٥ فأكثر | |
| ٩٠ فأكثر | |



(٣) الجدول التالي يبين التوزيع التكراري عدد ساعات المذاكرة اليومية لتلاميذ فصل به ٥٠ تلميذ

| المجموعات | - ٧ | - ٦ | - ٥ | - ٤ | - ٣ | - ٢ | - ١ | المجموع |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---------|
| التكرار | ٥٠ | ٦ | ٧ | ١٥ | ١٢ | ٥ | ٣ | ٢ |

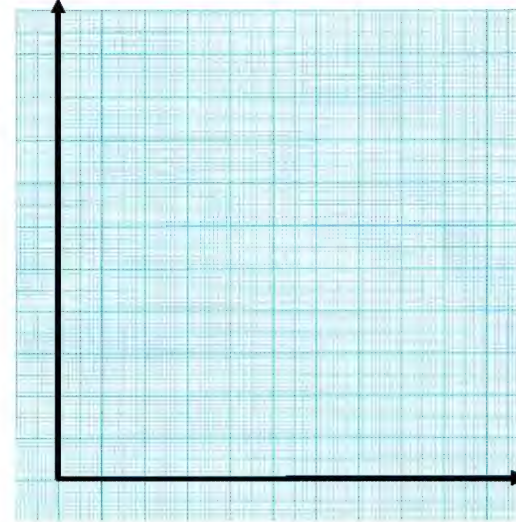
ارسم المنحنى التكراري المتجمع النازل ثم أوجد :

[١] عدد التلاميذ الذين يذاكرون ٦ ساعات فأكثر يومياً =

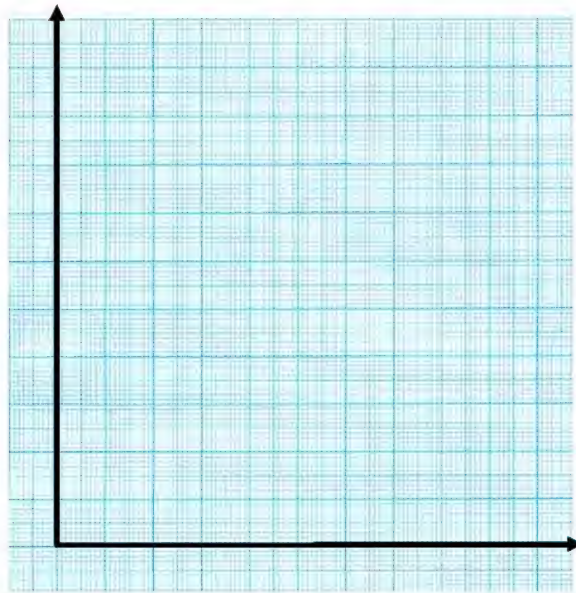
[٢] النسبة المئوية لعدد لتلاميذ الذين يذاكرون ٦ ساعات فأكثر يومياً

=

| الحدود السفلى للمجموعات | التكرار المتجمع النازل |
|-------------------------|------------------------|
| ١ فأكثر | |
| ٢ فأكثر | |
| ٣ فأكثر | |
| ٤ فأكثر | |
| ٥ فأكثر | |
| ٦ فأكثر | |
| ٧ فأكثر | |
| ٨ فأكثر | |



أحمد الشنتوي



(٥) الجدول التالي يبين التوزيع التكراري درجات ١٠٠ طالب في إحدى المواد

| المجموعات | - ٢٠ | - ٣٠ | - ٤٠ | - ٥٠ | - ٦٠ | - ٧٠ | - ٨٠ | - ٩٠ | المجموع |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|---------|
| التكرار | ٣٠ | ٧٠ | ١٦٠ | ٢٦٠ | ١٥٠ | ١٣٠ | ١١٠ | ٩٠ | ١٠٠٠ |

ارسم المنحنيين التكراريين المتجمعين الصاعد و النازل في نفس ورقة الرسم البياني ثم أوجد :

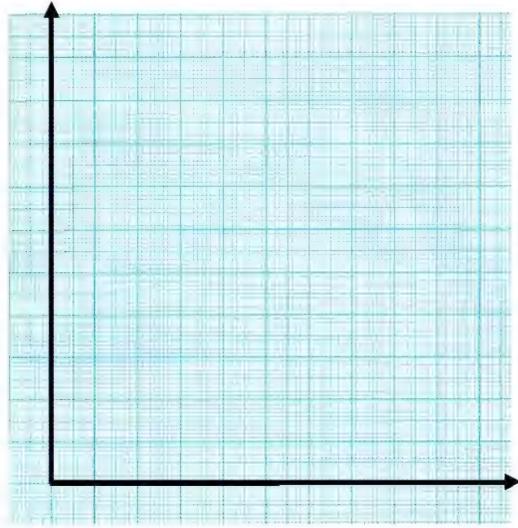
[١] عدد الطلبة الحاصلين على أقل من ٧٥ %

[٢] عدد الطلبة الحاصلين على ٨٥ % فأكثر

| جدول التكرار المتجمع الصاعد | جدول التكرار المتجمع النازل |
|-----------------------------|-----------------------------|
| الحدود العليا للمجموعات | الحدود السفلى للمجموعات |
| التكرار المتجمع الصاعد | التكرار المتجمع النازل |
| أقل من ٢٠ | ٢٠ فأكثر |
| أقل من ٣٠ | ٣٠ فأكثر |
| أقل من ٤٠ | ٤٠ فأكثر |
| أقل من ٥٠ | ٥٠ فأكثر |
| أقل من ٦٠ | ٦٠ فأكثر |
| أقل من ٧٠ | ٧٠ فأكثر |
| أقل من ٨٠ | ٨٠ فأكثر |
| أقل من ٩٠ | ٩٠ فأكثر |
| أقل من ١٠٠ | ١٠٠ فأكثر |

[١] عدد الطلبة الحاصلين على أقل من ٧٥ % =

[٢] عدد الطلبة الحاصلين على ٨٥ % فأكثر =



(٦) الجدول التالي يبين التوزيع التكراري درجات ١٠٠ طالب في إحدى المواد

| المجموعات | - ٠ | - ١٠ | - ٢٠ | - ٣٠ | - ٤٠ | - ٥٠ | المجموع |
|-----------|-----|------|------|------|------|------|---------|
| التكرار | ٨ | ١٤ | ١٥ | ٢٨ | ٢٣ | ١٢ | ١٠٠ |

ارسم المنحنيين التكراريين المتجمعين الصاعد و النازل في نفس ورقة الرسم البياني ثم أوجد :

[١] عدد الطلبة الحاصلين على أقل من ٤٠ درجة

[٢] عدد الطلبة الحاصلين على ٤٠ فأكثر

[٣] النسبة المئوية لنجاح الطلاب علماً بأن النهاية الصغرى

لنجاح ٢٠ درجة

[٤] النسبة المئوية للطلاب الحاصلين على ٤٥ درجة فأكثر

| جدول التكرار المتجمع الصاعد | | جدول التكرار المتجمع النازل | |
|-----------------------------|------------------------|-----------------------------|------------------------|
| الحدود العليا للمجموعات | التكرار المتجمع الصاعد | الحدود السفلى للمجموعات | التكرار المتجمع النازل |
| أقل من ٠ | | فأكثر ٠ | |
| أقل من ١٠ | | فأكثر ١٠ | |
| أقل من ٢٠ | | فأكثر ٢٠ | |
| أقل من ٣٠ | | فأكثر ٣٠ | |
| أقل من ٤٠ | | فأكثر ٤٠ | |
| أقل من ٥٠ | | فأكثر ٥٠ | |
| أقل من ٦٠ | | فأكثر ٦٠ | |

[١] عدد الطلبة الحاصلين على أقل من ٤٠ درجة =

[٢] عدد الطلبة الحاصلين على ٤٠ فأكثر =

[٣] النسبة المئوية لنجاح الطلاب علماً بأن النهاية الصغرى

لنجاح ٢٠ درجة =

[٤] النسبة المئوية للطلاب الحاصلين على ٤٥ درجة فأكثر

=

فيكون : $9 + 2 + 11 + 8 + 3 = 0 \times 7$
أي أن :

الوسط الحسابي :

هو القيمة التي لو أعطيت لكل مفردة من مفردات المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة هة نفس مجموع القيم الأصلية

(١) أكمل ما يلي :

[١] الوسط الحسابي للقيم : ١٢ ، ١١ ، ٧ هو

[٢] الوسط الحسابي للقيم : ٢ ، ٦ ، ٤ ، ٨ ، ٥ هو

[٣] إذا كان : الوسط الحسابي للقيم : ٩ ، ٦ ، ٢ ، ٥ ، ٨ هو ٧

فإن : ٢ =

[٤] إذا كان : الوسط الحسابي للقيم : ١ ، ٦ ، ٥ ، ٢ ، ٤ هو ٧

فإن : ٢ =

[٥] إذا كان : الوسط الحسابي للقيم : ١٨ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٢ ، ٢٢ - ١

هو ١٨ فإن : ٢ =

[٦] إذا كان : مجموع خمسة أعداد يساوي ٣٠ فإن الوسط الحسابي

لهذه الأعداد هو

الدرس الثالث : الوسط الحسابي - الوسيط - المنوال

بملاحظة التمثيلات البيانية لتوزيعات تكرارية نجد أن التكرارات تبدأ صغيرة ثم تتزايد حتى تصل إلى نهاية عظمى ثم تتناقص و هذا يعني أن عدداً كبيراً من التكرارات يتركز عند قيمة متوسطة و أن أغلب هذه التكرارات تتقرب من قيمة متوسطة من هذه القيمة و التي تمثل مركز جذب لأغلب التكرارات و هذا السلوك في أي توزيع تكراري يسمى بالانزعة المركزية و أي إحصائية لتوزيع تكراري يعتمد أساساً على دراسة هذا السلوك و قياسه

و من مقاييس الانزعة المركزية :

الوسط الحسابي (المتوسط) ، و الوسيط ، و المنوال

أولاً : الوسط الحسابي

نعلم أن :

الوسط الحسابي لمجموعة من القيم يتعين من العلاقة :

$$\text{الوسط الحسابي لمجموعة من القيم} = \frac{\text{مجموع هذه القيم}}{\text{عدد هذه القيم}}$$

فمثلاً :

الوسط الحسابي لمجموعة القيم : ٩ ، ٤ ، ١١ ، ٨ ، ٣

$$V = \frac{30}{5} = \frac{9 + 4 + 11 + 8 + 3}{5} =$$

ملاحظة :

الوسط الحسابي \times عدد القيم = مجموع القيم

| المجموعة | مركز المجموعة (٢) | التكرار (١) | ل × ٢ |
|----------|-------------------|-------------|-------|
| - ١٠ | ١٥ | ١١ | ١٦٥ |
| - ٢٠ | ٢٥ | ٢٠ | ٥٠٠ |
| - ٣٠ | ٣٥ | ٣١ | ١٠٨٥ |
| - ٤٠ | ٤٥ | ٢٥ | ١١٢٥ |
| - ٥٠ | ٥٥ | ١٥ | ٨٢٥ |
| المجموع | | ١٠٠ | ٣٧٠٠ |

$$(٣) \text{ الوسط الحسابي } = \frac{\text{مجموع (ل × ٢)}}{\text{مجموع ل}} = \frac{٣٧٠٠}{١٠٠} = ٣٧$$

(٢) أوجد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري التالي :

| المجموعات | - ٥ | - ١٥ | - ٢٥ | - ٣٥ | - ٤٥ | المجموع |
|-----------|-----|------|------|------|------|---------|
| التكرار | ١٠ | ٢٢ | ٣٠ | ٢٥ | ١٣ | ١٠٠ |

| المجموعة | مركز المجموعة (٢) | التكرار (١) | ل × ٢ |
|----------|-------------------|-------------|-------|
| - ٥ | | | |
| - ١٥ | | | |
| - ٢٥ | | | |
| - ٣٥ | | | |
| - ٤٥ | | | |
| المجموع | | ١٠٠ | |

الوسط الحسابي

$$\frac{....}{....} =$$

$$.... =$$

إيجاد الوسط الحسابي لبيانات من جداول تكرارية ذات مجموعات :

لإيجاد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري التالي :

| المجموعات | - ١٠ | - ٢٠ | - ٣٠ | - ٤٠ | - ٥٠ | المجموع |
|-----------|------|------|------|------|------|---------|
| التكرار | ١١ | ٢٠ | ٣١ | ٢٥ | ١٥ | ١٠٠ |

نتبع ما يلي :

(١) نحدد مراكز المجموعات حيث :

مركز المجموعة = $\frac{\text{حدها الأدنى} + \text{حدها الأعلى}}{٢}$ فيكون :

$$\text{مركز المجموعة الأولى} = \frac{٢٠ + ١٠}{٢} = ١٥$$

$$\text{مركز المجموعة الثانية} = \frac{٣٠ + ٢٠}{٢} = ٢٥$$

و نظراً لأن : مدى المجموعات الجزئية متساو ،

و كل منها = ١٠

نعتبر الحد الأعلى للمجموعة الأخيرة = ١٠٠ فيكون :

$$\text{مركزها} = \frac{١٠٠ + ٥٠}{٢} = ٧٥$$

(٥) نكون الجدول الرأسي التالي :

(٤) الجدول التالي يبين التوزيع التكراري لأوزان ٣٠ طفلاً :

| المجموعات | - ٦ | - ١٠ | - ١٤ | - ١٨ | - ٢٢ | - ٢٦ | - ٣٠ | المجموع |
|-----------|-----|------|------|------|------|------|------|---------|
| التكرار | ٢ | ٣ | ٧ | ٨ | ٦ | ٤ | ٢ | ٣٠ |

$$[١] \quad ٧ = \dots$$

[٢] عدد الأطفال الذين لا يقل وزنهم عن ٢٦ كجم =

[٣] أوجد الوسط الحسابي لهذا التوزيع

| المجموعة | مركز المجموعة (م) | التكرار (ن) | ن × م |
|----------|-------------------|-------------|-------|
| - ٦ | | | |
| - ١٠ | | | |
| - ١٤ | | | |
| - ١٨ | | | |
| - ٢٢ | | | |
| - ٢٦ | | | |
| - ٣٠ | | | |
| المجموع | | ٣٠ | |

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

(٣) الجدول التالي يبين الأجر اليومي لعدد ٥٠ عاملاً في أحد المصانع حيث التوزيع التكراري ذي مجموعات متساوية المدى :

| المجموعات | - ٥ | - ١٥ | - ٢٥ | - ٣٥ | - ٤٥ | المجموع |
|-----------|-----|------|-------|------|------|---------|
| التكرار | ٧ | ١٠ | ١ + ٧ | ١٣ | ٨ | ٥٠ |

[١] أوجد قيمة كل من : س ، ن

$$س = \dots , \quad ن = \dots$$

[٢] أوجد الوسط الحسابي لهذا التوزيع

| المجموعة | مركز المجموعة (م) | التكرار (ن) | ن × م |
|----------|-------------------|-------------|-------|
| - ٥ | | | |
| - ١٥ | | | |
| - ٢٥ | | | |
| - | | | |
| - ٤٥ | | | |
| المجموع | | ٥٠ | |

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

ثانياً : الوسيط

هو القيمة التي تتوسط مجموعة المفردات بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً بحيث يكون عدد القيم الأصغر منها مساوياً لعدد القيم الأكبر منها

تذكر : لإيجاد الوسيط لمجموعة من القيم نتبع التالي :

نرتب القيم تصاعدياً أو تنازلياً ثم :

(١) إذا كان : عدد القيم فردياً

فإن الوسيط هو : القيمة التي تقع في الوسط تماماً
و يكون ترتيب الوسيط هو : $\frac{1}{2}$ (عدد القيم + ١)

(٢) إذا كان : عدد القيم زوجياً

فإن الوسيط = $\frac{1}{2}$ (مجموع القيمتين اللتين تقعان في الوسط)

فمثلاً :

(١) لإيجاد الوسيط لمجموعة القيم : ٥ ، ٩ ، ٧ ، ٨ ، ٦ ، ٠

نرتب القيم : ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ٠

و بما أن : عدد القيم هو ٥ إذن ترتيب الوسيط هو : ٣

و يكون الوسيط = ٧

(٢) الوسيط لمجموعة القيم : ١٠ ، ٤ ، ٨ ، ١ ، ٦ ، ٢ ، ٠

نرتب القيم : ١٠ ، ٨ ، ٦ ، ٤ ، ٢ ، ٠ ، ١

و بما أن : عدد القيم هو ٦

إذن الوسيط = $\frac{1}{2}$ (٦ + ٤) = ٥

(٥) أكمل ما يلي :

[١] الوسيط لمجموعة القيم : ٥ ، ٦ ، ٣ هو

[٢] الوسيط لمجموعة القيم : ٩ ، ٥ ، ٢ ، ٣ ، ٧ ، ١١ هو

[٣] ترتيب الوسيط للقيم : ٥ ، ٧ ، ١ ، ٦ ، ٤ هو

[٤] إذا كان ترتيب الوسيط لعدد من القيم هو الرابع فإن عدد هذه القيم هو

إيجاد الوسيط لتوزيع تكراري ذي مجموعات بيانياً :

لإيجاد الوسيط لتوزيع تكراري ذي مجموعات بيانياً نتبع ما يلي :

(١) ننشأ الجدول التكراري المتجمع الصاعد أو النازل

ثم نرسم المنحنى التكراري المتجمع له

(٢) نحدد ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2}$

(٣) نحدد نقطة مثل (٢) على المحور الرأسى (التكرار)

و التي تمثل ترتيب الوسيط

(٤) نرسم مستقيماً أفقياً من نقطة (٢) فيقطع المنحنى في نقطة

نرسم منها عموداً على المحور الأفقى ليقطعه في نقطة تمثل الوسيط

فمثلاً :

الجدول التالي يبين التوزيع التكراري لدرجات ٤ تلميذاً في أحد الاختبارات
نوجد الوسيط لهذا التوزيع التكراري كما يلي :

حل آخر :

(١) ننشأ الجدول التكراري المتجمع النازل

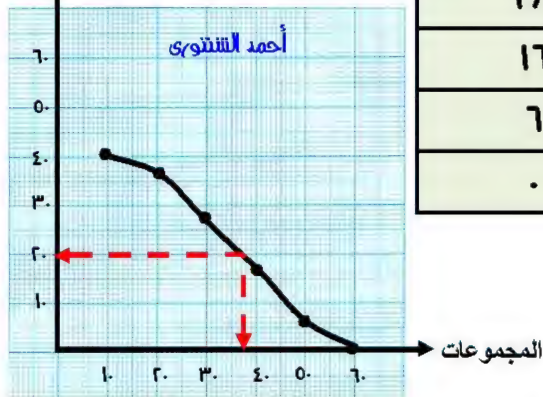
(٢) نحدد ترتيب الوسيط $\frac{4}{2} = 2$

(٣) نرسم المنحنى التكراري المتجمع النازل

و من الرسم نوجد الوسيط

| جدول التكرار المتجمع النازل | |
|-----------------------------|------------------------|
| الحدود السفلى للمجموعات | التكرار المتجمع النازل |
| ١. فأكثر | ٤٠ |
| ٢. فأكثر | ٣٦ |
| ٣. فأكثر | ٢٨ |
| ٤. فأكثر | ١٦ |
| ٥. فأكثر | ٦ |
| ٦. فأكثر | ٠ |

التكرار المتجمع النازل



من الرسم : الوسيط = ٣,٨

| المجموعات | - ١٠ | - ٢٠ | - ٣٠ | - ٤٠ | - ٥٠ | المجموع |
|-----------|------|------|------|------|------|---------|
| التكرار | ٤ | ٨ | ١٢ | ١٠ | ٦ | ٤٠ |

(١) ننشأ الجدول التكراري المتجمع الصاعد

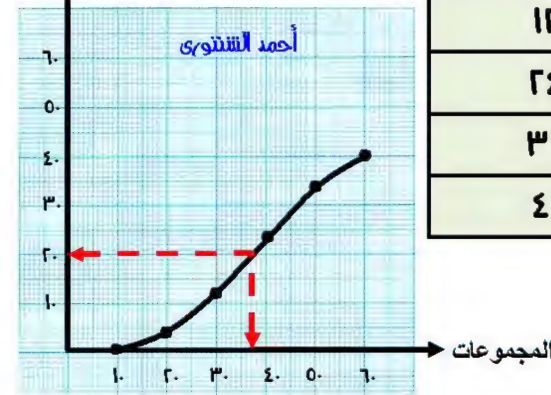
(٢) نحدد ترتيب الوسيط $\frac{4}{2} = 2$

(٣) نرسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد

و من الرسم نوجد الوسيط

| جدول التكرار المتجمع الصاعد | |
|-----------------------------|------------------------|
| الحدود العليا للمجموعات | التكرار المتجمع الصاعد |
| أقل من ١٠ | ٠ |
| أقل من ٢٠ | ٤ |
| أقل من ٣٠ | ١٢ |
| أقل من ٤٠ | ٢٤ |
| أقل من ٥٠ | ٣٤ |
| أقل من ٦٠ | ٤٠ |

التكرار المتجمع الصاعد

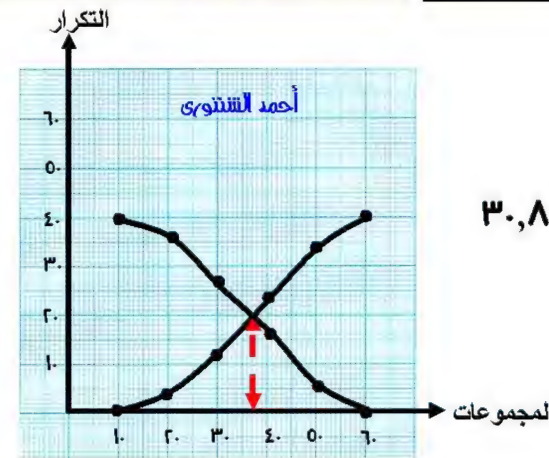


من الرسم : الوسيط = ٣,٨

حل ثالث :

نرسم كل من المنحنى المتجمع الصاعد و النازل في نفس ورقة الرسم البياني فيتقاطعا في نقطة ، من هذه النقطة نرسم مستقيماً رأسياً يقطع المحور الأفقي في نقطة تمثل الوسيط

| جدول التكرار المتجمع الصاعد | | جدول التكرار المتجمع النازل | |
|-----------------------------|------------------------|-----------------------------|------------------------|
| الحدود العليا للمجموعات | التكرار المتجمع الصاعد | الحدود السفلى للمجموعات | التكرار المتجمع النازل |
| أقل من ١٠ | ٠ | ١٠ فأكثر | ٤٠ |
| أقل من ٢٠ | ٤ | ٢٠ فأكثر | ٣٦ |
| أقل من ٣٠ | ١٢ | ٣٠ فأكثر | ٢٨ |
| أقل من ٤٠ | ٢٤ | ٤٠ فأكثر | ١٦ |
| أقل من ٥٠ | ٣٤ | ٥٠ فأكثر | ٦ |
| أقل من ٦٠ | ٤٠ | ٦٠ فأكثر | ٠ |



من الرسم : الوسيط = ٣,٨

(٦) أوجد من منحنى التكرار المتجمع الصاعد الوسيط للتوزيع التكراري التالي :

| المجموعات | - ٤٠ | - ٤٠ | - ٣٠ | - ٣٠ | - ٢٠ | المجموع |
|-----------|------|------|------|------|------|---------|
| التكرار | ٦٠ | ٥ | ٢٣ | ١٩ | ١٠ | ٣ |

| جدول التكرار المتجمع الصاعد | |
|-----------------------------|------------------------|
| الحدود العليا للمجموعات | التكرار المتجمع الصاعد |
| أقل من ٢٠ | |
| أقل من ٣٠ | |
| أقل من ٣٠ | |
| أقل من ٤٠ | |
| أقل من ٤٠ | |
| أقل من ٥٠ | |

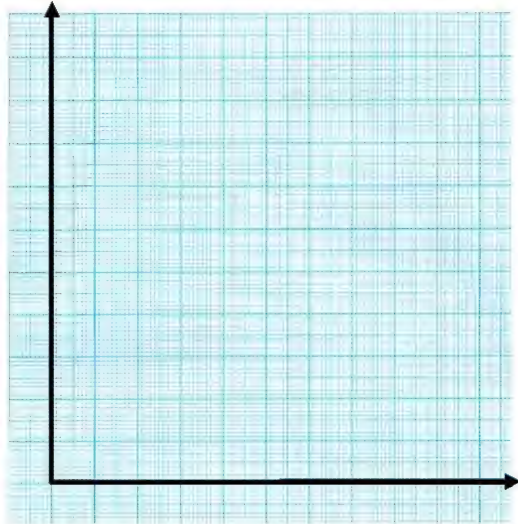
∴ ترتيب الوسيط =

∴ من الرسم : الوسيط =

[١] أكمل : س = ، ل = =

[٢] أوجد : الوسيط من المنحنيين المتجمعين الصاعد و النازل

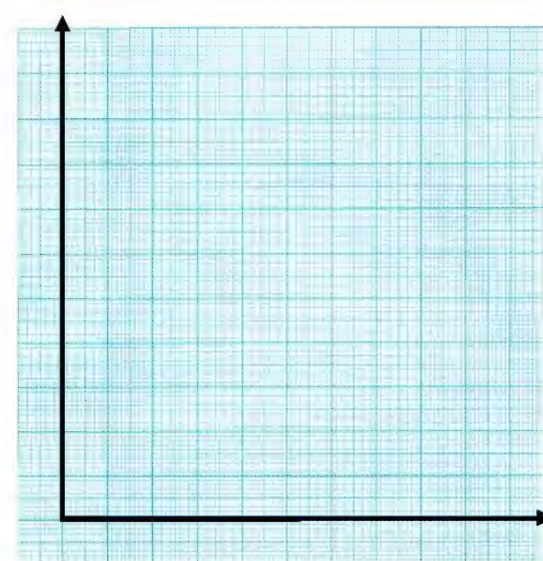
| جدول التكرار المتجمع الصاعد | | جدول التكرار المتجمع النازل | |
|-----------------------------|------------------------|-----------------------------|------------------------|
| الحدود العليا للمجموعات | التكرار المتجمع الصاعد | الحدود السفلى للمجموعات | التكرار المتجمع النازل |
| أقل من ١٠ | | ١٠ فأكثر | |
| أقل من ٢٠ | | ٢٠ فأكثر | |
| أقل من | | فأكثر | |
| أقل من ٤٠ | | ٤٠ فأكثر | |
| أقل من ٥٠ | | ٥٠ فأكثر | |
| أقل من ٦٠ | | ٦٠ فأكثر | |
| أقل من ٧٠ | | ٧٠ فأكثر | |



(٧) أوجد من منحنى التكرار المتجمع النازل

الوسيط للتوزيع التكراري التالي :

| المجموعات | - ١٥ | - ٢٠ | - ٢٥ | - ٣٠ | - ٣٥ | - ٤٠ | المجموع |
|-----------|------|------|------|------|------|------|---------|
| التكرار | ١٠ | ١٥ | ٢٢ | ٢٥ | ٢٠ | ٨ | ١٠٠ |



| جدول التكرار المتجمع النازل | |
|-----------------------------|------------------------|
| الحدود السفلى للمجموعات | التكرار المتجمع النازل |
| ١٥ فأكثر | |
| ٢٠ فأكثر | |
| ٢٥ فأكثر | |
| ٣٠ فأكثر | |
| ٣٥ فأكثر | |
| ٤٠ فأكثر | |
| ٤٥ فأكثر | |

∴ ترتيب الوسيط =

∴ من الرسم : الوسيط =

(٨) من الجدول التكراري التالي ذي المجموعات المتساوية المدى :

| المجموعات | - ١٠ | - ٢٠ | - ٣٠ | - ٤٠ | - ٥٠ | - ٦٠ | المجموع |
|-----------|------|------|------|------|--------|------|---------|
| التكرار | ١٠ | ١٧ | ٢٠ | ٣٢ | ٢٠ + ٢ | ٤ | ١٠٠ |

ثالثاً : المنوال

المنوال لمجموعة من القيم هو :
القيمة الأكثر شيوعاً (تكراراً) في هذه القيم

فمثلاً :

المنوال لمجموعة القيم : ٥ ، ٨ ، ٧ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ٥
هو : ٥ لأن : ٥ القيمة الأكثر شيوعاً (تكراراً)

(٩) أكمل ما يلي :

[١] المنوال لمجموعة القيم : ٥ ، ٩ ، ٧ ، ٩ هو

[٢] المنوال لمجموعة القيم : ٤ ، ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٧ ، ٥ ، ٤ هو

[٣] إذا كان : المنوال للقيم : ٥ ، ٧ ، ١ + ٢ ، ٦ ، ٤ هو ٤

فإن : ٢ =

[٤] إذا كان : المنوال للقيم : ١٥ ، ٩ ، ٢ + ٩ ، ١٥ هو ٩

فإن : ٩ =

[٥] إذا كان : المنوال للقيم : ٦ ، ٨ ، ٢ - ٩ ، ٦ هو ٦

فإن : ٩ =

خطوات إيجاد المنوال لتوزيع تكراري ذي مجموعات بيانياً :
تتضح خطوات إيجاد المنوال لتوزيع تكراري ذي مجموعات من خلال
المثال التالي :

| المجموعات | - ١٠ | - ٢٠ | - ٣٠ | - ٤٠ | - ٥٠ | المجموع |
|-----------|------|------|------|------|------|---------|
| التكرار | ٦ | ١٠ | ١٤ | ١٢ | ٨ | ٥٠ |

[١] رسم المدرج التكراري كما يلي :

[١] نرسم محورين أحدهما أفقياً للمجموعات و الآخر رأسياً لتمثيل تكرار كل مجموعة

[٢] نقسم المحور الأفقي لعدد من الأقسام المتساوية بمقياس رسم مناسب لتمثيل المجموعات

[٣] نقسم المحور الرأسى لعدد من الأقسام المتساوية بمقياس رسم مناسب بحيث يمكن تمثيل أكبر تكرار في المجموعات

[٤] نرسم مستطيلاً قاعدته هي المجموعة (- ١٠) و ارتفاعه يساوي التكرار (٦)

[٥] نرسم مستطيلاً ثانياً ملاصقاً للمستطيل الأول قاعدته هي المجموعة (- ٢٠) و ارتفاعه يساوي التكرار (١٠)

[٦] نكرر رسم باقي المستطيلات المتلاصقة حتى آخر مجموعة (- ٥٠)

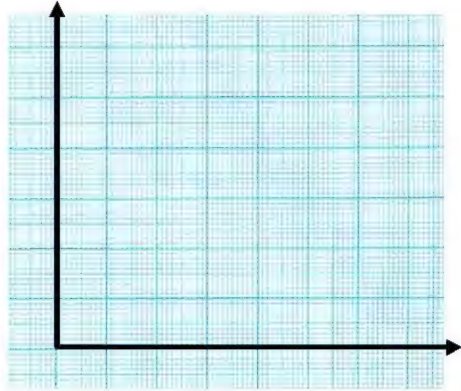
[٢] إيجاد المنوال من المدرج التكراري كما يلي :

لإيجاد المنوال من المدرج التكراري نلاحظ أن :

المجموعة الأكثر تكراراً هي المجموعة (- ٣٠) و تسمى المجموعة المنوالية

(١١) أوجد المنوال من التوزيع التكراري التالي :

| المجموعات | - ٥٥ | - ٤٥ | - ٣٥ | - ٢٥ | - ١٥ | - ٥ | المجموع |
|-----------|------|------|------|------|------|-----|---------|
| التكرار | ٥٠ | ٤ | ٨ | ١٠ | ١٢ | ٩ | ٧ |

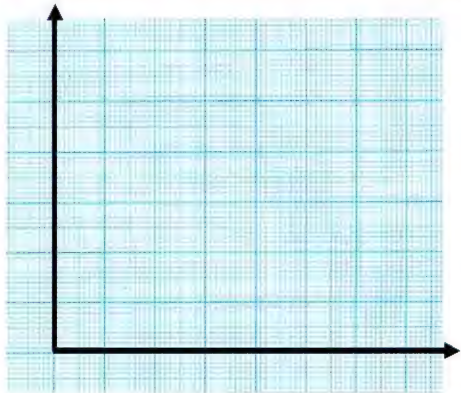


من الرسم :

المنوال =

(١٢) أوجد المنوال من التوزيع التكراري التالي :

| المجموعات | - ٨٠ | - ٧٠ | - ٦٠ | - ٥٠ | - ٤٠ | - ٣٠ | المجموع |
|-----------|------|------|------|------|------|------|---------|
| التكرار | ٤٠ | ٦ | ٧ | ٨ | ١٢ | ٤ | ٣ |



من الرسم :

المنوال =

أحمد الشنتوي

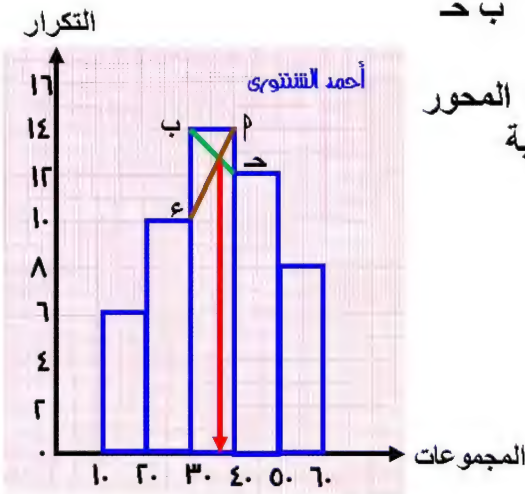
نحدد نقطة تقاطع \bar{p} ، \bar{b} ،

كما بالشكل المقابل

و نسقط منها عموداً على المحور الأفقي يحدد القيمة المنوالية للتوزيع

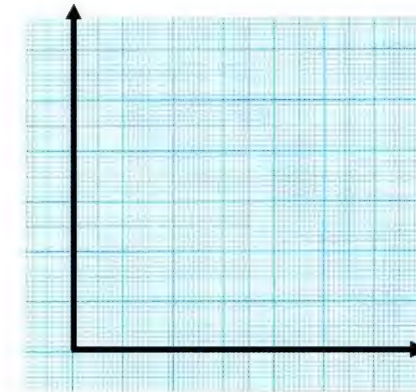
من الرسم :

المنوال = ٣٨



(١٠) أوجد المنوال من التوزيع التكراري التالي :

| المجموعات | - ٥٠ | - ٤٠ | - ٣٠ | - ٢٠ | - ١٠ | المجموع |
|-----------|------|------|------|------|------|---------|
| التكرار | ١٠٠ | ١٠ | ٢٠ | ٣٠ | ٢٤ | ١٦ |



من الرسم :

المنوال =

أحمد الشنتوي

(١٣) الجدول التالي يبين التوزيع التكراري ذى المجموعات متساوية المدى

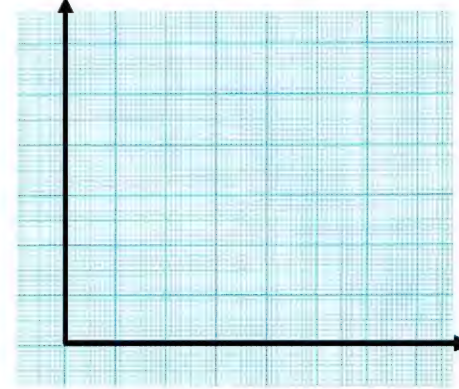
لأوزان ٥٠ تلميذاً بالكيلو جرام بإحدى المدارس :

| المجموعات | ٣٠ - | ٣٥ - | س - | ٤٥ - | ٥٠ - | المجموع |
|-----------|-------|------|-----|---------|---------|---------|
| التكرار | ٤ + ك | ٣ ك | ٤ ك | ٣ ك + ١ | ٣ ك - ١ | ٥٠ |

[١] أكمل : س = ، ك =

[٢] من الرسم أكمل :

المنوال =



(١٤) أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] الوسط الحسابي للقيم : ١٩ ، ٣٠ ، ٢٠ ، ٧ ، ٦ ، ٨ هو

(٩٠ ، ٣٠ ، ١٨ ، ٦)

[٢] إذا كان : الوسط الحسابي للقيم : ٣ - ك ، ١ ، ٤ ، ٥ ،

٢ + ٣ ك هو ٧ فإن : ك =

(٣٥ ، ١٠ ، ٧ ، ٥)

[٣] إذا كان : الوسط الحسابي لستة قيم هو ١٢ فإن : مجموع هذه

القيم = (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ٧٢)

[٤]

المجموعة التى حدها الأدنى = ٢ ، حدها الأعلى = ٦ يكون

مركزها هو (٢ ، ٦ ، ٤ ، ٨)

[٥] الوسيط لمجموعة القيم : ١٥ ، ٢٢ ، ٩ ، ١١ ، ٢٣ هو

(٩ ، ١٥ ، ١٨ ، ٩٠)

[٦] ترتيب الوسيط لمجموعة القيم : ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ هو

(الثالث ، الرابع ، الخامس ، السادس)

[٧] إذا كان : ترتيب الوسيط لمجموعة من القيم هو الرابع فإن :

عدد هذه القيم يساوى (٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩)

[٨] إذا كان المنوال للقيم : ٣ ، ك ، ٥ ، ٤ هو ٣ فإن :

فإن : ك = (٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦)

(١٥) أكمل ما يلى :

[١] القيمة الأكثر تكراراً لمجموعة من القيم تسمى

[٢] نقطة تقاطع المنحنيين المتجمع الصاعد و النازل على المحور

الأفقى تعين

[٣] المنوال لمجموعة القيم : ١٤ ، ١١ ، ١٠ ، ١١ ، ١٤ ، ١٥ ، ١١

هو

[٤] إذا كان : مجموع خمسة أعداد يساوى ٣٠ فإن : الوسط

الحسابي لهذه الأعداد هو

الوحدة الرابعة متوسطات المثلث و المثلث المتساوي الساقين

الدرس الأول : متوسطات المثلث

متوسط المثلث :

هو القطعة المستقيمة المرسومة من رأس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس
ففي الشكل المقابل :

إذا كان : \overline{AE} منتصف \overline{BC}

فإن : \overline{AE} متوسط في $\triangle ABC$

ملاحظة :

أي مثلث له ثلاث متوسطات

نظرية (١) :

متوسطات المثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة
ففي الشكل المقابل :

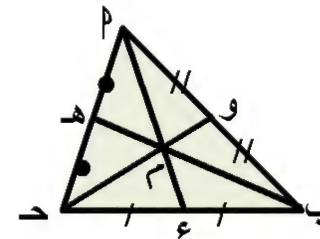
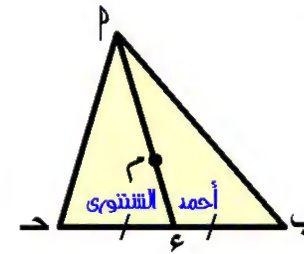
إذا كان : \overline{AE} منتصف \overline{BC}

، \overline{BF} منتصف \overline{AC}

، و \overline{CD} منتصف \overline{AB}

فإن : \overline{AD} ، \overline{BE} ، \overline{CF}

تتقاطع في نقطة واحدة هي نقطة G
و تسمى نقطة تقاطع متوسطات المثلث



نظرية (٢) :

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها
بنسبة ٢ : ١ من جهة القاعدة
ففي الشكل المقابل :

إذا كانت : G نقطة تقاطع متوسطات $\triangle ABC$
فإن : $AG : GE = 2 : 1$ أو $AG = 2GE$

، $BG : GF = 2 : 1$ أو $BG = 2GF$

، $CG : GD = 2 : 1$ أو $CG = 2GD$

فمثلاً :

إذا كان : $AG = 6$ سم فإن : $GE = \frac{1}{2} AG = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ سم
، إذا كان : $BG = 4$ سم فإن : $GF = \frac{1}{2} BG = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ سم

ملاحظات :

(١) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

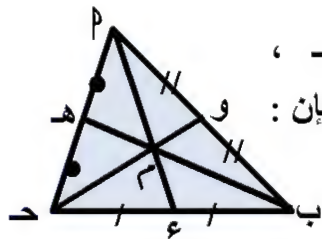
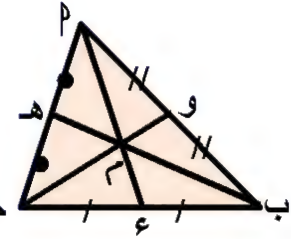
(٢) في الشكل المقابل :

إذا كان : \overline{AE} متوسط في $\triangle ABC$ ،

G نقطة تقاطع متوسطات $\triangle ABC$ فإن :

$AG = \frac{2}{3} AE$ ، $GE = \frac{1}{3} AE$

، $CG = \frac{2}{3} CE$ ، $GD = \frac{1}{3} CE$

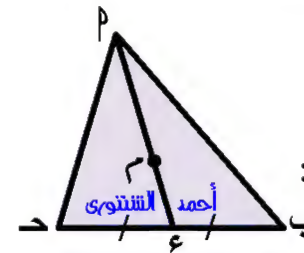


فمثلاً :

إذا كان : $٦٠ = ٩٠$ سم فإن : $٦٠ = ٩٠ \times \frac{1}{3} = ٣٠$ سم
 $٦٠ = ٩٠ \times \frac{2}{3} = ٦٠$ سم ،
 و بالمثل : $٦٠ = ٩٠ \times \frac{1}{3} = ٣٠$ سم ،
 $٦٠ = ٩٠ \times \frac{2}{3} = ٦٠$ سم ،
 $٦٠ = ٩٠ \times \frac{1}{3} = ٣٠$ سم ،
 $٦٠ = ٩٠ \times \frac{2}{3} = ٦٠$ سم ،

حقيقة :

النقطة التي تقسم متوسط المثلث بنسبة ٢ : ١ من
 جهة القاعدة هي نقطة تقاطع متوسطات هذا المثلث
 ففي الشكل المقابل :



إذا كان : \overline{DM} متوسط في $\triangle PDB$

، $M \in \overline{DM}$ بحيث : $DM = \frac{1}{3} PM$ فإن :

M تكون نقطة تقاطع متوسطات $\triangle PDB$

(١) أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] في $\triangle PDB$ إذا كان : E منتصف \overline{BD} فإن : \overline{PE} تسمى(ارتفاع ، متوسط ، وترأ ، منتصف للزاوية P)

[٢] عدد متوسطات أي مثلث

(١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)

[٣] نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل منها بنسبة

من جهة الرأس

(٢ : ١ ، ٢ : ٢ ، ٣ : ١ ، ٣ : ٣)

[٤] إذا كانت M نقطة متوسطات $\triangle PDB$ ، وكانت E منتصف \overline{BD} فإن : $PE = \dots$

(٢ ، ٢ ، ٢ ، ٢)

[٥] إذا كانت M نقطة متوسطات $\triangle PDB$ ، وكان \overline{PE} متوسططوله ٦ سم فإن : $PM = \dots$ سم

(١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)

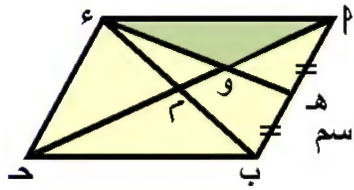
[٦] إذا كانت M نقطة متوسطات $\triangle PDB$ ، وكان \overline{PE} متوسط، $PM = ٦$ سم فإن : $PE = \dots$ سم

(٢ ، ٣ ، ١٢ ، ١٨)

[٧] مستطيل تقاطع قطراه في نقطة M ، طول قطره ٦ سم فإن :طول المتوسط $PM = \dots$ سم

(٢ ، ٣ ، ٦ ، ١٢)

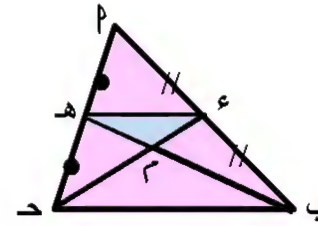
أحمد الشنتوي



(٤) في الشكل المقابل :

ABD متوازي أضلاع فيه :

AB = CD ، AD = BC ، AC = BD ،
 O = ١٢ سم ،
 O = ٩ سم أوجد محيط $\triangle ABD$ و



(٢) في الشكل المقابل :

إذا كان : E ، H منتصفى AB ،
 B = ٩ سم ، C = ٤ سم ،
 B = ٨ سم ، أكمل ما يلى :

[١] BE ، HO فى $\triangle ABD$ [٢] O نقطة تقاطع $\triangle ABD$

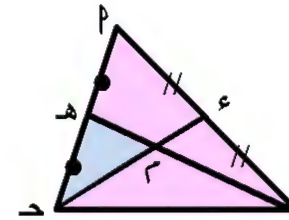
[٣] O = H = B = ... = ... = ... سم

[٤] O = E = C = ... = ... = ... سم

[٥] E = H = B = ... = ... = ... سم

[٦] محيط $\triangle ABC$ = ... + ... + ... = ... سم

أحمد الشنتوري



(٣) في الشكل المقابل :

إذا كان : E ، H منتصفى AB ،
 B = ٨ سم ، C = ٣ سم ،
 B = ٨ سم ، أكمل ما يلى :

[١] O = H = B = ... = ... = ... سم

[٢] O = E = C = ... = ... = ... سم

[٣] O = H = B = ... = ... = ... سم

[٤] محيط $\triangle ABC$ = ... + ... + ... = ... سم

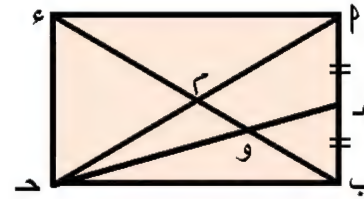
(٥) في الشكل المقابل :

ΔPBD مستطيل فيه :

$PD = DH$ ، $BD = BO$ ، $BO = OM$

أثبت أن : O نقطة تقاطع متوسطات

ΔPBD ثم أوجد طول OM

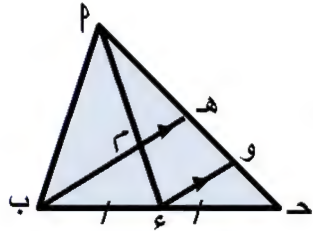


(٦) في الشكل المقابل :

ΔPBD فيه : E منتصف BD بحيث :

$PE = 2$ ، $PD = 4$ ، $DE = 2$ سم ،

$EO \parallel BD$ أوجد طول EO



أحمد الشنتوري

نظرية (٣) :

طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي نصف طول وتر هذا المثلث

المعطيات : Δ \triangle ب د ح فيه $\angle \text{ب} = 90^\circ$ ، $\overline{\text{ب د}}$ متوسط

المطلوب : إثبات أن : $\text{ب د} = \frac{1}{2} \text{ح د}$

العمل : نرسم $\overline{\text{ب د}}$ ، نأخذ نقطة

$\text{هـ} \in \overline{\text{ب د}}$ بحيث : $\text{ب د} = 2 \text{هـ د}$

البرهان : \therefore الشكل $\triangle \text{ب د هـ}$ فيه

$\overline{\text{ب د}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ ينصف كل

منهما الآخر

\therefore الشكل $\triangle \text{ب د هـ}$ متوازي أضلاع

$\therefore \angle \text{ب} = 90^\circ$: الشكل $\triangle \text{ب د هـ}$ مستطيل

$\therefore \text{ب د} = 2 \text{هـ د}$

$\therefore \text{ب د} = 2 \times \frac{1}{2} \text{ح د}$ ،

$\therefore \text{ب د} = \frac{1}{2} \text{ح د}$

فمثلاً :

في الشكل المقابل :

إذا كان : $\Delta \triangle \text{ب د ح}$ فيه :

$\angle \text{ب} = 90^\circ$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ب د}}$

، و كان :

(١) $\text{ب د} = ٨ \text{ سم}$ فإن : $\text{ب د} = ٤ \text{ سم}$

(٢) $\text{ب د} = ٥ \text{ سم}$ فإن : $\text{ب د} = ١٠ \text{ سم}$

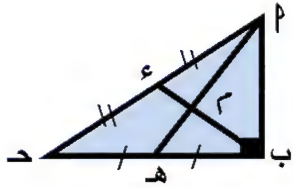
(٧) في الشكل المقابل :

$\angle \text{ب} = 90^\circ$ ، $\text{ب د} = \text{ب هـ}$ ،

$\text{ب د} = \text{ب هـ}$ ،

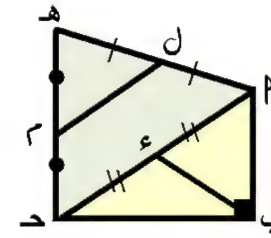
فإذا كان : $\text{ب د} = ١٢ \text{ سم}$

أوجد طول كل من : $\overline{\text{ب د}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$



أحمد الشنتوري

(٨) في الشكل المقابل :



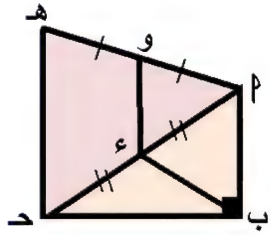
$$\text{و } (\triangle PBD) = 90^\circ , \text{ } \angle P = \angle D$$

$$\text{و } \angle L = \angle H , \text{ } \angle L = \angle H$$

$$\text{فإذا كان : } \angle L = \angle H$$

أوجد طول \overline{PQ}

(٩) في الشكل المقابل :



$$\text{و } (\triangle PBD) = 90^\circ , \text{ } \angle P = \angle D$$

$$\text{و } \angle L = \angle H , \text{ } \angle L = \angle H$$

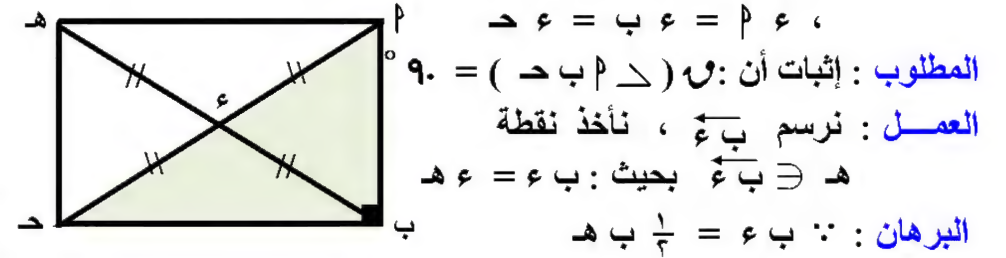
$$\text{أثبت أن : } \angle L = \angle H$$

أحمد الشنتوي



عكس نظرية (٣) :

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة
المعطيات : Δ م ب د فيه و (ب د) ، $\angle ٩٠^\circ$ ، $\overline{ب د}$ متوسط



$$\frac{1}{2} م د = ب ه \therefore م ب د = ب ه$$

، \therefore الشكل م ب د ه فيه $\overline{م د}$ ، $\overline{ب ه}$ متساويان فى الطول ، ينصف كل منهما الآخر
 \therefore الشكل م ب د ه مستطيل
 \therefore و (م ب د) ، $\angle ٩٠^\circ$

فمثلاً :

فى الشكل المقابل :

إذا كان : Δ م ب د فيه :

و (ب د) ، $\angle ٩٠^\circ$ ، ع منتصف $\overline{م د}$

، و كان : $م د = ٨$ سم ،

ب ع = ٤ سم أى أن : ب ع = $\frac{1}{2} م د$

فإن : \therefore و (م ب د) ، $\angle ٩٠^\circ$

أحمد الشنتوي

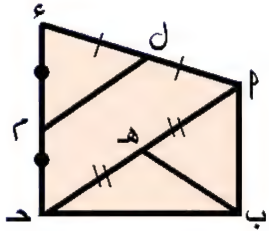
(١٠) فى الشكل المقابل :

م ب د ه شكل رباعى فيه :

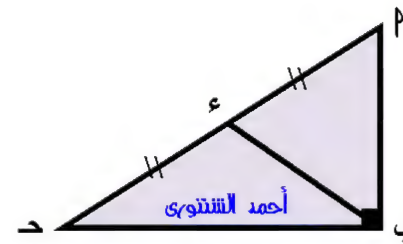
م ه = ه د ، ، ع ل = ل م

، م ع = م د ، ل م = ب ه

أثبت أن : و (م ب د) ، $\angle ٩٠^\circ$

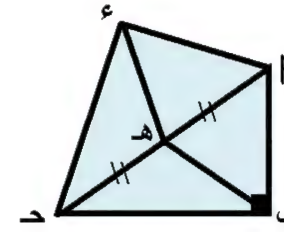


أحمد الشنتوي



أحمد الشنتوي

(II) في الشكل المقابل :



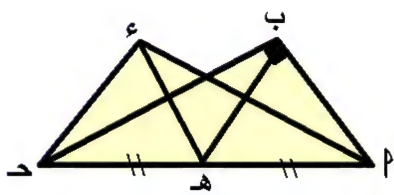
م ب د ع شكل رباعي فيه :

و (م ب د ع) = ٩٠° ، م ه = ه د

، ب ه = ه ع

أثبت أن : و (م ع د) = ٩٠°

(I) في الشكل المقابل :



و (م ب د ع) = ٩٠° ،

م ه = ه د ، ب ه = ه ع

أثبت أن : و (م ع د) = ٩٠°

أحمد الشنتوري

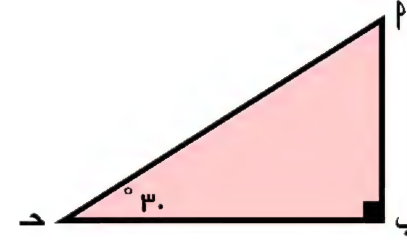
نتيجة :

طول الضلع المقابل لزاوية قياسها 30° في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر

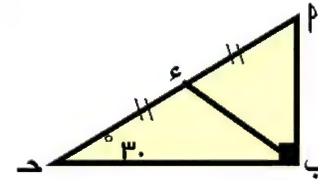
ففي الشكل المقابل :

إذا كان $\triangle PBD$ فيه : $\angle PBD = 90^\circ$ ، $\angle BPD = 30^\circ$ ،فإن : $BD = \frac{1}{2} PD$

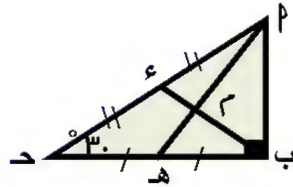
فمثلاً :

إذا كان : $PD = 8$ سمفإن : $BD = 4$ سم

(١٣) في الشكل المقابل :

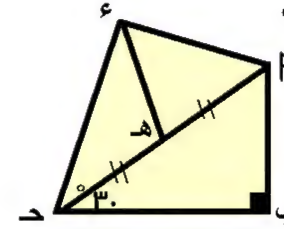
 $\triangle PBD$ فيه : $\angle PBD = 90^\circ$ ، $\angle BPD = 30^\circ$ ، $BD = 16$ سمأوجد محيط $\triangle PBD$ 

(١٤) في الشكل المقابل :

 $\triangle PBD$ فيه : $\angle PBD = 90^\circ$ ، $\angle BPD = 30^\circ$ ، $BD = 12$ سم $PD = 24$ سم ، $BD = 12$ سم ، أوجد محيط $\triangle PBD$ 

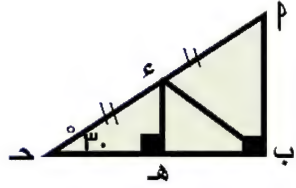
أحمد الشنتوي

(١٥) في الشكل المقابل :



و $\angle P = 30^\circ$ ، و $\angle BDE = 40^\circ$ ،
 $PD = DE$ ، $BD = BE$ سم
 $DE \perp PB$ سم أوجد طول PD
 ثم أثبت أن : و $\angle PDE = 90^\circ$

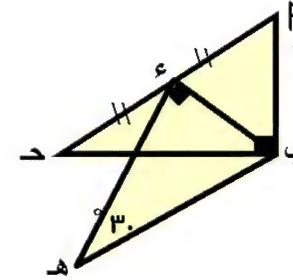
(١٦) في الشكل المقابل :



$\triangle PBD$ فيه : و $\angle P = 40^\circ$
 ، و $\angle BDE = 30^\circ$ ، $PD = DE$
 ، $BD = BE$ سم ، $DE \perp PB$
 أوجد طول كل من : PD ، DE

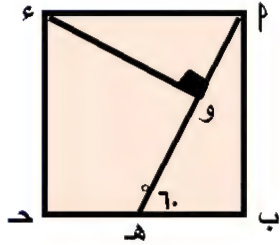
أحمد الشنتوري

(١٧) في الشكل المقابل :



$$\begin{aligned} \angle 1 &= (\angle PBD) = (\angle BPD) = \angle 2 \\ \angle 3 &= (\angle BPD) = \angle 4 \\ \angle 5 &= \angle 6, \text{ } \angle 7 = \angle 8 \\ \text{سم } BE &= \text{سم } PD, \text{ أوجد طول } PD \end{aligned}$$

(١٨) في الشكل المقابل :

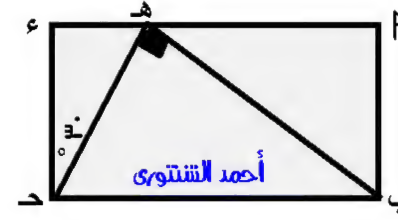


$$\begin{aligned} \angle 1 &= (\angle PBD) = (\angle BPD) = \angle 2 \\ \angle 3 &= (\angle BPD) = \angle 4 \\ \angle 5 &= \angle 6, \text{ } \angle 7 = \angle 8 \\ \text{سم } BE &= \text{سم } PD, \text{ أوجد مساحة المربع } PBD \end{aligned}$$

أحمد الشنتوري

(١٩) في الشكل المقابل :

$\overline{AB} \perp \overline{CD} \Rightarrow \overline{AH} \perp \overline{CD}$
 بحيث : $\angle AHD = 30^\circ$
 $\angle BHD = 90^\circ$ ،
 أثبت أن : $CH = \frac{1}{2} AB$



(٢٠) أكمل ما يلي :

[١] طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس الزاوية

القائمة يساوي طول الوتر

[٢] طول الضلع المقابل للزاوية 30° في المثلث القائم الزاوية

يساوي طول الوتر

[٣] إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوي

نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس

تكون

[٤] في $\triangle ABC$ القائم الزاوية في ب ، إذا كان : $AB = 20$ سم

فإن : طول المتوسط المرسوم من ب يساوي سم

[٥] في $\triangle ABC$ القائم الزاوية في ب ، إذا كان : $AB = 6$ سم، $BC = 8$ سم فإن : طول المتوسط المرسوم من ب يساوي

.... سم


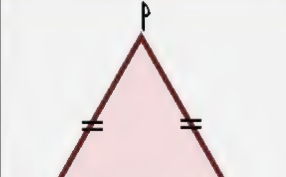

[٦] في $\triangle ABC$ القائم الزاوية في ب ، إذا كان : طول المتوسطالمرسوم من ب يساوي ٣ سم فإن : $AB =$ سم

أحمد الشنتوري

الدرس الثاني : المثلث المتساوي الساقين

نعلم أن :

المثلثات تصنف حسب أطوال أضلاعها إلى ثلاثة أنواع هي :

| مثلث مختلف الأضلاع | مثلث متساوي الساقين (متطابق الضلعين) | مثلث متساوي الأضلاع (متطابق الأضلاع) |
|--|---|--|
|  <p>$PB \neq BD \neq PD$</p> |  <p>$PB = BD \neq PD$</p> |  <p>$PB = BD = PD$</p> |

ملاحظة :

في الشكل المقابل :

(١) الضلعان : \overline{PB} ، \overline{PD} متطابقان

(متساويان في الطول)

لذلك يسمى المثلث PBD بالمثلث المتساوي الساقين(٢) تسمى النقطة P رأس المثلث، $\angle P$ زاوية رأس المثلث(٣) تسمى \overline{BD} قاعدة المثلث ، و الزاويتين : $\angle B$ ، $\angle D$

زاويتي قعدة المثلث

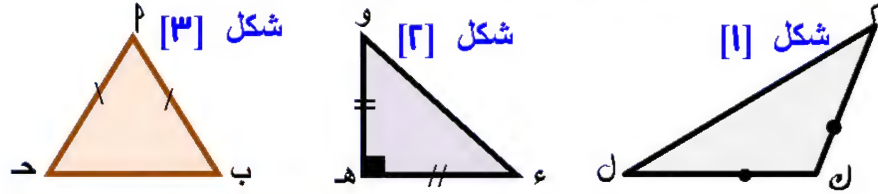
خواص المثلث المتساوي الساقين :

في أي مثلث متساوي الساقين يكون :

[١] زاوية رأس المثلث قد تكون حادة أو قائمة أو منفرجة

[٢] زاويتي قاعدة المثلث كل منهما حادة

(١) لاحظ الأشكال التالية ثم أكمل الجدول :



| رقم الشكل | [١] | [٢] | [٣] |
|------------------------|-----|-----|-----|
| اسم المثلث | | | |
| القاعدة | | | |
| الساقان | | | |
| زاويتي القاعدة | | | |
| زاوية الرأس و نوعها | | | |


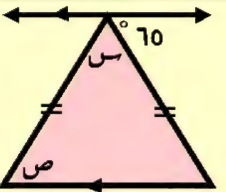
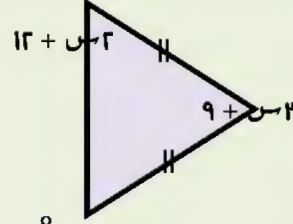

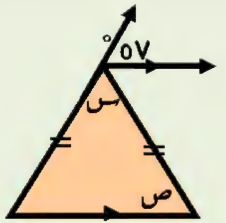
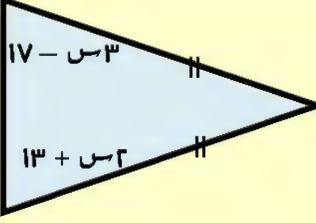
الدرس الثالث : نظريات المثلث المتساوي الساقين

نظرية (١) :

زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متطابقتان

المعطيات : $\triangle PAB$ فيه $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$ المطلوب : إثبات أن : $\angle A \equiv \angle B$ العمل : نرسم $\overline{PE} \perp \overline{AB}$ البرهان : \therefore المثلثان $\triangle PAE$ ، $\triangle PBE$ قائما الزاوية فيهما : $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$ معطى ، \overline{PE} ضلع مشترك $\therefore \triangle PAE \equiv \triangle PBE$ وينتج من التطابق أن : $\angle A \equiv \angle B$

(١) في كل شكل من الأشكال التالية أوجد قيم الرموز المستخدمة في قياسات الزوايا :

| | |
|---|---|
| <p>[٤]</p>  <p>س = ... ، ص = ... ع = ...</p> | <p>[٣]</p>  <p>س = ... ، ص = ...</p> |
| <p>[٦]</p>  <p>س = ...</p> | <p>[٥]</p>  <p>س = ...</p> |
| <p>[٨]</p>  <p>س = ... ، ص = ...</p> | <p>[٧]</p>  <p>س = ...</p> |

أحمد الشنتوي

نتيجة :

إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فإن زواياه الثلاثة تكون متطابقة
و يكون قياس كل منها 60°

فمثلاً :

في الشكل المقابل :

إذا كان $\triangle PAB$ فيه : $PA = PB = AB$ فإن :

$$\angle P = \angle B = \angle A = 60^\circ$$

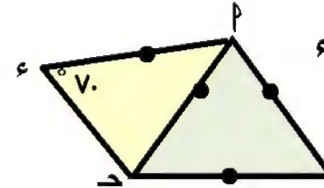


(٢) في الشكل المقابل :

$$PA = PB, \quad PA = AB, \quad PB = AB$$

أوجد : $\angle A = ?$

$$\angle A = 60^\circ, \quad \angle B = 60^\circ, \quad \angle P = 60^\circ$$



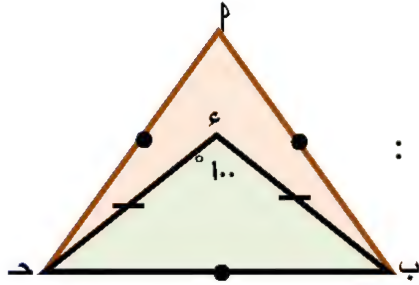
(٣) في الشكل المقابل :

$$PA = PB = AB, \quad \angle A = 60^\circ$$

$$\angle B = 60^\circ, \quad \angle P = 60^\circ$$

أوجد : $\angle A = ?$

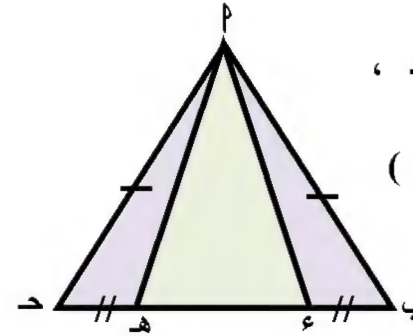
$$\angle B = 60^\circ, \quad \angle P = 60^\circ$$



أحمد الشنتوري

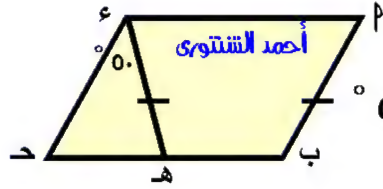
(٤) في الشكل المقابل :

$\angle P = \angle B = \angle C$ ، $\angle P = \angle B = \angle C$ ،
أثبت أن : $\angle P = \angle B = \angle C$ ،
 $\angle P = \angle B = \angle C$ ، $\angle P = \angle B = \angle C$



(٥) في الشكل المقابل :

$\angle B = \angle C$ متوازي أضلاع ،
 $\angle B = \angle C$ ، $\angle B = \angle C$ ،
أوجد : $\angle P$



أحمد الشنتوري



نظرية (٢) :

إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متطابقين ، و يكون المثلث متساوي الساقين

المعطيات : ΔPAB فيه $\angle B \equiv \angle A$

المطلوب : إثبات أن : $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$

العمل : ننصف $\angle B$ ب PA بالمنصف \overline{PE}

يقطع \overline{PA} في E

البرهان : $\angle B \equiv \angle A$

$$\therefore \angle (B) = \angle (A)$$

$$\therefore \overline{PE} \text{ ينصف } \angle B$$

$$\therefore \angle (B) = \angle (A) = \angle (PEB) = \angle (PEA)$$

$$\therefore \text{مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة} = 180^\circ$$

$$\therefore \text{المثلثان } PEB, PEA \text{ فيهما :}$$

\overline{PE} ضلع مشترك

$$\angle (B) = \angle (A) = \angle (PEB) = \angle (PEA)$$

$$\angle (B) = \angle (A) = \angle (PEB) = \angle (PEA)$$

$$\therefore \Delta PEB \equiv \Delta PEA$$

وينتج من التطابق أن : $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$

و يكون : ΔPAB متساوي الساقين

نتيجة :

إذا تطابق زواياه مثلث فإنه يكون متساوي الأضلاع

فمثلاً :

في الشكل المقابل :

إذا كان : ΔPAB فيه :

$$\angle B \equiv \angle A \equiv \angle P$$

$$PB = PA = AB$$

أي أن : ΔPAB متساوي الأضلاع

ملاحظة :

المثلث المتساوي الساقين الذي قياس إحدى زواياه 60° يكون متساوي الأضلاع

فمثلاً :

$$(1) \text{ إذا كان : } \Delta PAB \text{ فيه : } PB = PA, \angle (P) = 60^\circ$$

$$\text{فإن : } \angle (B) = \angle (A)$$

$$= \frac{1}{2} (180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$$

$\therefore \Delta PAB$ متساوي الأضلاع

(٢) إذا كان : ΔSVE فيه : $SE = VE$ ،

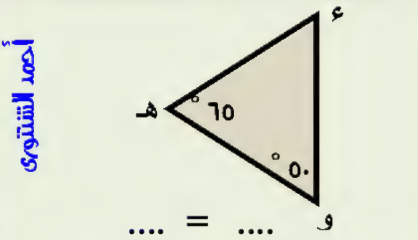
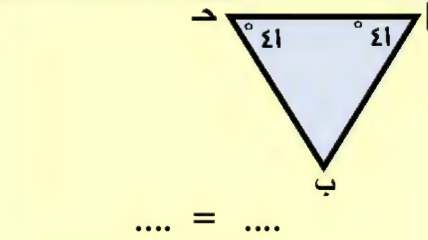
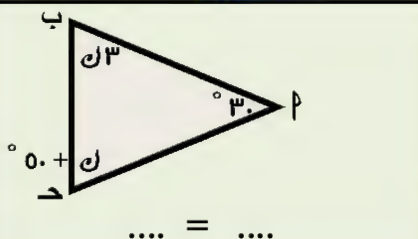
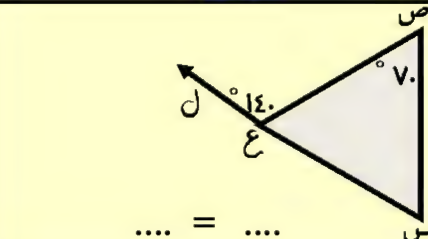
$$\angle (S) = 60^\circ \text{ فإن : } \angle (E) = 60^\circ$$

$$\angle (V) = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$$

$\therefore \Delta SVE$ متساوي الأضلاع

أحمد الشنتوري

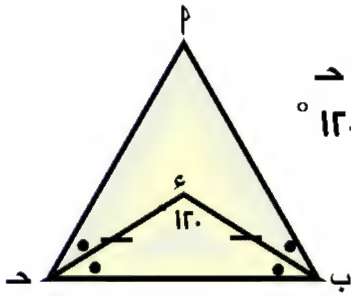
(٦) في كل شكل من الأشكال التالية أكتب أضلاع المثلث المتساوية في الطول :

| | |
|---|---|
| <p>[٢]</p>  <p>.... =</p> | <p>[١]</p>  <p>.... =</p> |
| <p>[٤]</p>  <p>.... =</p> | <p>[٣]</p>  <p>.... =</p> |

(٧) Δ ب د ه فيه : $\angle د = (\angle ب د ه) = 72^\circ$ ، $\angle ب = (\angle د ب ه) = 72^\circ$ ، $\angle ه = 36^\circ$.
أثبت أن Δ ب د ه متساوي الساقين

(٨) في الشكل المقابل :

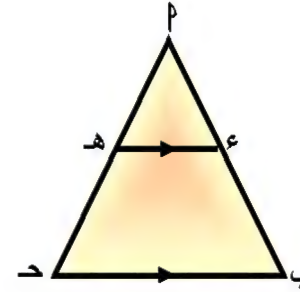
$\overrightarrow{بء}$ ينصف $\angle ب$ ، $\overrightarrow{حء}$ ينصف $\angle ح$ ،
 $\angle بء = \angle حء$ ، $\angle بء = 120^\circ$ ،
 أثبت أن $\Delta ب د ه$ متساوي الأضلاع



أحمد الشنتوري

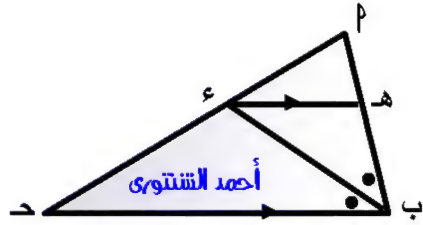
(٩) في الشكل المقابل :

$MP = MB$ ، $\overline{BD} \parallel \overline{ME}$
 أثبت أن : $\triangle MPE$ متساوي الساقين
 ثم أثبت أن : $BE = ED$



(١٠) في الشكل المقابل :

\overrightarrow{BE} ينصف $\angle PBD$ ،
 $\overline{BD} \parallel \overline{ME}$
 أثبت أن : $\triangle MPE$ متساوي الساقين



أحمد الشنتوري

(II) أكمل ما يلي :

[1] في $\Delta P \text{ بـ د}$ إذا كان : $\angle P = 70^\circ$ ، $\angle B = 50^\circ$ فإن : $\angle D = \dots$ [2] في $\Delta P \text{ بـ د}$ إذا كان : $\angle P = 80^\circ$ ، $\angle D = 100^\circ$ ،فإن : $\angle B = \dots$ [3] إذا كان : $\Delta P \text{ بـ د}$ القائم الزاوية في ب ، و كان : $\angle P = 90^\circ$ فإن : $\angle D = \dots$

[4] إذا كان قياس إحدى زاويتي القاعدة في مثلث متساوي الساقين

 48° فإن قياس زاوية رأس المثلث يساوي[5] إذا كان قياس زاوية رأس مثلث متساوي الساقين 74°

فإن قياس زاوية القاعدة يساوي

[6] في $\Delta P \text{ بـ د}$ إذا كان : $\angle P = 60^\circ$ ، $\angle D = 120^\circ$ ،و محيطه 10 سم فإن : $\angle B = \dots$ سم[7] قياس أي زاوية من زوايا المثلث المتساوي الأضلاع $= \dots^\circ$ [8] قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوي الأضلاع $= \dots^\circ$ [9] إذا قياس إحدى زاويتي قاعدة مثلث متساوي الساقين 40°

كان المثلث

أحمد الشنتوي

(12) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[1] إذا كان قياس إحدى زاويتي القاعدة في المثلث المتساوي الساقين

 30° كان المثلث

(منفرج الزوية ، حاد الزوايا ، قائم الزاوية ، متساوي الأضلاع)

[2] في $\Delta P \text{ بـ د}$ إذا كان : $\angle P = 90^\circ$ ، $\angle D = 100^\circ$ ،فإن : $\angle B = \dots^\circ$

(90 ، 60 ، 40 ، 30)

[3] في $\Delta P \text{ بـ د}$ المتساوي الساقين إذا كان : $\angle P = 90^\circ$ فإن : $\angle D = \dots^\circ$

(90 ، 60 ، 40 ، 30)

[4] مجموع قياسي زاويتي القاعدة في المثلث المتساوي الأضلاع

يساوي

(120 ، 90 ، 60 ، 30)

[5] في $\Delta P \text{ بـ د}$ إذا كان : $\angle P = 90^\circ$ فإن : الزاوية

الخارجة عند الرأس ع تكون

(حادة ، قائمة ، منفرجة ، منعكسة)

[6] إذا كان قياسا زاويتين في مثلث 70° ، 40° كان المثلث

(مختلف الأضلاع ، متساوي الأضلاع ،

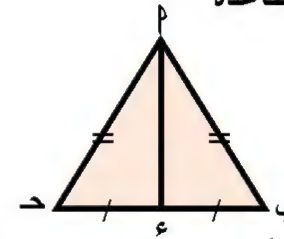
متساوي الساقين ، قائم الزاوية و متساوي الساقين)

أحمد الشنتوي

الدرس الرابع : نتائج على نظريات المثلث المتساوي الساقين

نتيجة (١) :

متوسط المثلث المتساوي الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عمودياً على القاعدة



ففي الشكل المقابل :

إذا كان : $\triangle PBC$ فيه :

$PB = PC$ ، \overline{PE} متوسط فإن :

(١) \overline{PE} ينصف $\angle BPC$

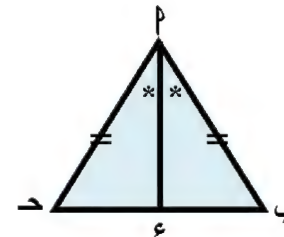
أي أن : $\angle BPE = \angle CPE$ (٢) $\overline{PE} \perp \overline{BC}$

ملاحظة :

$\triangle PBC \equiv \triangle PCB$ لأن : \overline{PE} ضلع مشترك ،
 $PB = PC$ ، $BE = EC$

نتيجة (٢) :

منصف زاوية رأس المثلث المتساوي الساقين ينصف القاعدة ويكون عمودياً عليها



ففي الشكل المقابل :

إذا كان : $\triangle PBC$ فيه :

$PB = PC$ ، \overline{PE} ينصف $\angle BPC$ فإن :

(١) \overline{PE} منتصف \overline{BC} أي أن : $BE = EC$

(٢) $\overline{PE} \perp \overline{BC}$

أحمد الشنتوي

ملاحظة :

$\triangle PBC \equiv \triangle PCB$ لأن : \overline{PE} ضلع مشترك ،
 $PB = PC$ ، $\angle BPE = \angle CPE$ (٢) $\overline{PE} \perp \overline{BC}$

نتيجة (٣) :

المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوي الساقين عمودياً على القاعدة ينصف كلاً من القاعدة و زاوية الرأس

ففي الشكل المقابل :

إذا كان : $\triangle PBC$ فيه :

$PB = PC$ ، $\overline{PE} \perp \overline{BC}$ فإن :

(١) \overline{PE} منتصف \overline{BC}

أي أن : $BE = EC$

(٢) $\angle BPE = \angle CPE$ (٣) $\overline{PE} \perp \overline{BC}$

ملاحظة :

$\triangle PBC \equiv \triangle PCB$ لأن : \overline{PE} ضلع مشترك ،
 $PB = PC$ ، $\angle BPE = \angle CPE$ (٣) $\overline{PE} \perp \overline{BC}$

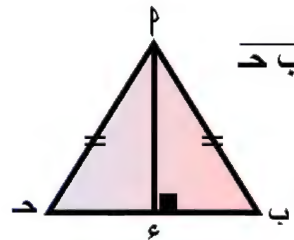
(١) في الشكل المقابل :

$\triangle PBC$ فيه : $PB = PC$ ، $\overline{PE} \perp \overline{BC}$

، $\angle BPE = \angle CPE$ (٢) $\overline{PE} \perp \overline{BC}$

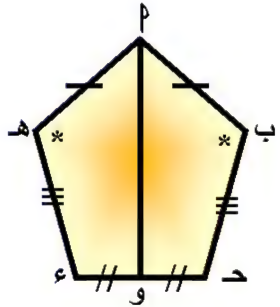
، $BE = EC$ سم أوجد :

طول \overline{PE} ، (٣) $\overline{PE} \perp \overline{BC}$



أحمد الشنتوي

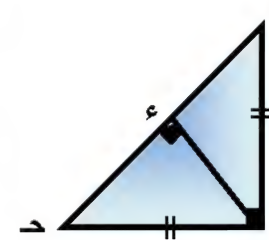
(٣) في الشكل المقابل :



$\text{ب} = \text{د}$ ، $\text{ب} = \text{د}$ ، $\text{ب} = \text{د}$ ،
 $\text{و} = \text{و}$ ، $\text{و} = \text{و}$ ،
 $\text{و} = \text{و}$ ، $\text{و} = \text{و}$ ،
 $\text{و} \perp \text{و}$

أحمد الشنتوي

(٢) في الشكل المقابل :

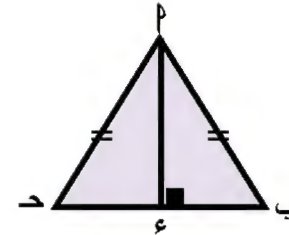


$\Delta \text{ب} \text{د} \text{ح}$ قائم الزاوية في ب ، $\text{ب} = \text{د}$ ،
 $\text{ب} \text{ع} \perp \text{د} \text{و}$ ، $\text{ب} \text{ع} = \text{د} \text{و}$ سم أوجد :
 $\text{و} = \text{و}$ ، $\text{و} = \text{و}$ ،
 ثم أستنتج أن : $\Delta \text{ب} \text{د} \text{ح}$ متساوي الساقين

محاور التماثل :

أولاً : محاور تماثل للمثلث المتساوي الساقين :

محور تماثل المثلث المتساوي الساقين هو المستقيم المرسوم من رأسه عمودياً على قاعدته
ففي الشكل المقابل :



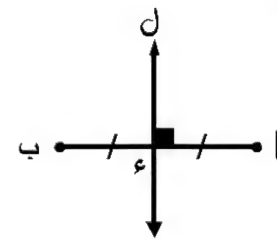
إذا كان : ΔPBC فيه :
 $PB = PC$ ، $PE \perp BC$ فإن :
 \overleftrightarrow{PE} هو محور تماثل للمثلث PBC المتساوي الساقين

ملاحظات :

- (١) المثلث المتساوي الساقين له محور تماثل واحد فقط
- (٢) المثلث المتساوي الأضلاع له ثلاثة محاور تماثل
- (٣) المثلث المختلف الأضلاع له محاور تماثل

ثانياً : محاور تماثل القطعة المستقيمة :

يسمى المستقيم العمودي على قطعة مستقيمة محور تماثل لهذه القطعة المستقيمة
و للاختصار يسمى محور القطعة المستقيمة
ففي الشكل المقابل :



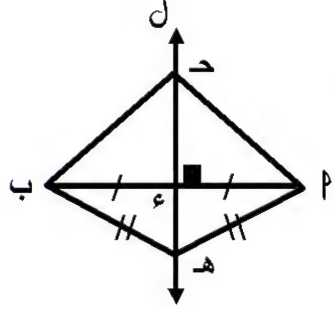
إذا كانت : E منتصف \overline{AB} ،
المستقيم $l \perp \overline{AB}$ حيث : $E \in l$
فإن : المستقيم l هو محور تماثل \overline{AB}

خاصية :

أى نقطة على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها

ففي الشكل المقابل :

إذا كان : المستقيم l محور تماثل \overline{AB}
فإن :

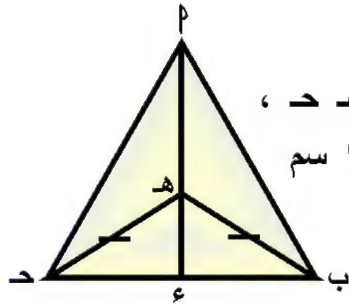
(١) إذا كان : $H \in l$ فإن :

$$PB = PH$$

(٢) إذا كان : $PH = HB$ فإن :

$H \in l$ لأن : عكس الخاصية صحيح

فإذا كانت هناك نقطة على بعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة فإن هذه النقطة تقع على محور هذه القطعة المستقيمة



(٤) في الشكل المقابل :

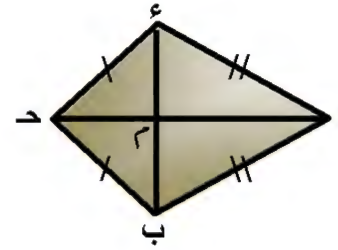
$$PB = PH = HB = 13 \text{ سم} ، HB = PB = HD ،$$

$$\overleftrightarrow{PH} \cap \overline{BD} = \{E\} ، PB = HD = 10 \text{ سم}$$

أوجد طول كل من : \overline{DE} ، \overline{PE}

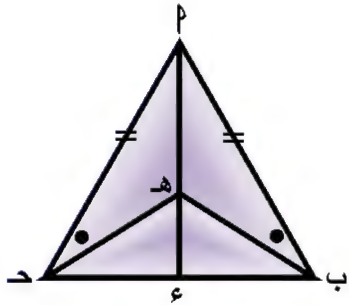
(٥) في الشكل المقابل :

$\overline{بم} \cap \overline{بم} = \{م\}$ ، $بم = مم$ ،
 $بم = مم$ ، أثبت أن :
 $م$ منتصف $\overline{بم}$



(٧) في الشكل المقابل :

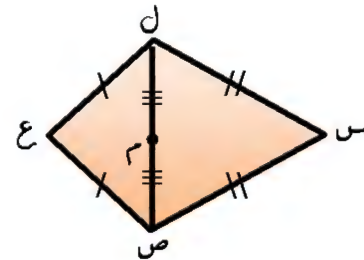
$\triangle بـدـم$ فيه : $بم = دـم$ ،
 $\angle (بـدـم) = \angle (بـمـد)$ ،
 أثبت أن : $\overrightarrow{مـه}$ محور $\overline{بـد}$



أحمد الشنتوري

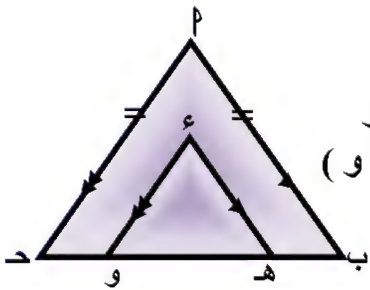
(٦) في الشكل المقابل :

$صـل = صـل$ ، $لـع = لـع$ ،
 $لـم = صـم$ ، أثبت أن :
 $ص$ ، $م$ ، $ع$ على استقامة واحدة



(٨) في الشكل المقابل :

$بـم = دـم$ ، $\overline{بـم} \parallel \overline{دـم}$ ،
 $\overline{بـم} \parallel \overline{دـم}$ ، أثبت أن : $بـم = دـم$ ،
 $\angle (بـمـد) = \angle (دـمـب)$ ،



(٩) أكمل ما يلي :

[١] المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوي الساقين عمودياً على القاعدة يسمى

[٢] المستقيم العمودي على القطعة المستقيمة من منتصفها يسمى

[٣] أى نقطة تنتمي لمحور القطعة المستقيمة تكون على بعدين من طرفيها

[٤] فى Δ ABD إذا كان : $AB = BD$ ، $\angle B = 60^\circ$ ،

فإن : عدد محاور تماثل ΔABD =

[٥] فى Δ ABD إذا كان : $AB = BD$ ، $\angle B = 90^\circ$ ،

فإن : عدد محاور تماثل ΔABD =

[٦] إذا كان Δ ABD له محور تماثل واحد و فيه :

$\angle B = 120^\circ$ ، فإن : $\angle A = \angle D = \dots^\circ$

[٧] العمود الساقط من رأس المثلث المتساوي الساقين على القاعدة

ينصف كلاً من ،

[٨] الشعاع المنصف لزاوية رأس المثلث المتساوي الساقين ينصف

.... و يكون

(١٠) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان طول أى ضلع فى مثلث = $\frac{1}{3}$ محيط المثلث فإن :

عدد محاور تماثل المثلث =

(صفر ، ١ ، ٢ ، ٣)

[٢] فى المعين $ABCD$ يكون : AC محور تماثل هو

(\overleftrightarrow{AC} ، \overleftrightarrow{BD} ، \overleftrightarrow{AD} ، \overleftrightarrow{BC})

[٣] إذا كان : $AB = BC$ هو محور تماثل ABC فإن :

($AB = BC$ ، $AB = AC$ ، $BC = AC$)

($AB = BC$ ، $BC = AC$ ، $AB = AC$)

[٤] إذا كان : ABD شكل رباعي فيه : $AB = BD$ ، $\angle B = 90^\circ$ ،

$BD = DE$ فإن : $\angle ADE = \dots^\circ$

(يوازي ، عمودى على ، محور تماثل ، يطابق)

[٥] إذا كان : Δ ABD قائم الزاوية فى B ، $\angle B = 90^\circ$ ،

فإن : عدد محاور تماثل ΔABD =

(صفر ، ١ ، ٢ ، ٣)

[٦] إذا كان : Δ ABD قائم الزاوية فى B ، $\angle B = 40^\circ$ ،

فإن : عدد محاور تماثل ΔABD =

(صفر ، ١ ، ٢ ، ٣)

[٧] المستقيم العمودى على القاعدة المستقيمة من منتصفها يسمى

.... لها

(موازى ، منصف ، متوسط ، محور تماثل)

أحمد الشنتوري

الوحدة الخامسة

التباين

الدرس الأول : التباين

مفهوم التباين :
نعلم أن :

علاقة التباين هي العلاقة التي تستخدم للمقارنة بين عددين مختلفين و نعبّر عنها بإحدى العلامتين : $<$ (أكبر من) ، (أصغر من) و تسمى كل منهما متباينة أو علاقة تباين و لما كانت أطوال القطع المستقيمة و كذلك قياسات الزوايا عبارة عن أعداد لذا تستخدم علاقة التباين للمقارنة بين طولى قطعتين مستقيمتين أو قياسى زاويتين

فمثلاً :

(١) إذا كان : $m = 6$ سم ، $n = 4$ سم فإن :

$m > n$ أو $n < m$

(٢) إذا كان : $m = 60^\circ$ ، $n = 42^\circ$ فإن :

$m > n$ أو $n < m$

(١) أكمل ما يلى مستخدماً علامة ($>$ أو $<$) :

(١) إذا كانت m حادة فإن : $m > 90^\circ$

(٢) إذا كانت n منفرجة فإن : $n > 90^\circ$

(٣) إذا كان : $s = 3$ سم ، $l = 5$ سم

فإن : $l > s$

أحمد الشنتوري

(٢) فى الشكل المقابل :

[١] أكمل :

(١) $m > n$ = (.....)

(٢) $m > n$ = (.....)

[٢] أكمل ما يلى مستخدماً علامة ($>$ أو $<$) :

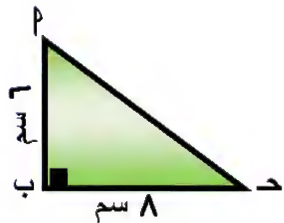
(١) $m > n$ = (.....)

(٢) $m > n$ = (.....)

(٣) $m > n$ = (.....)

(٤) $m > n$ = (.....)

(٣) فى الشكل المقابل أكمل ما يلى مستخدماً علامة ($>$ أو $<$) :



[١] $m > n$

[٢] $m > n$

[٣] $m > n$

[٤] $m > n$ = (.....)

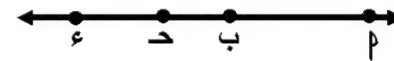
[٥] $m > n$ = (.....)

أحمد الشنتوري

مسلمات التباين :

لأي ثلاثة أعداد $س$ ، $ص$ ، $ع$:[١] إذا كان : $س < ص$ فإن : $س + ع < ص + ع$ [٢] إذا كان : $س < ص$ فإن : $س - ع < ص - ع$ [٣] إذا كان : $س < ص$ ، $ع$ عدداً موجباًفإن : $س ع < ص ع$ [٤] إذا كان : $س < ص$ ، $ص < ع$ فإن : $س < ع$ [٥] إذا كان : $س < ص$ ، $ص < م$ فإن : $س + ص < م + ص$

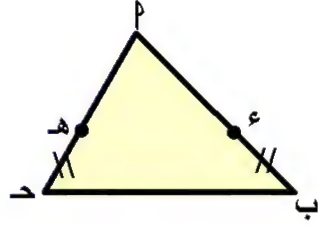
(٤) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overrightarrow{م ب} \supset \overrightarrow{ع ب}$ ، $\overrightarrow{م ب} \supset \overrightarrow{د ب}$ ، كان : $م ب < د ب$ ،أثبت أن : $م د < ب د$ 

(٥) في الشكل المقابل :

 $\triangle م ب د$ فيه : $م ب < م د$ ،

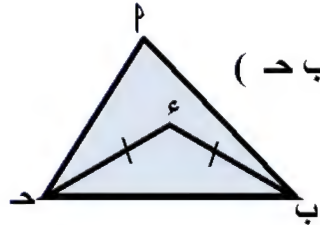
ب د = ع د ، أثبت أن :

 $م د < ع د$ 

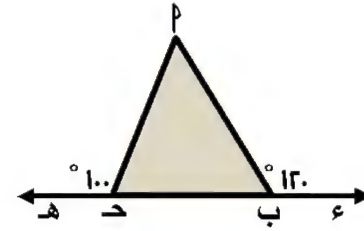
(٦) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\angle م د ب < \angle م د ع$ ، $\angle م د ب > \angle م د د$

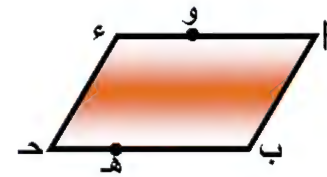
، ب د = ع د ، أثبت أن :

 $\angle م د ع < \angle م د د$ ، $\angle م د ب > \angle م د د$ 

(٧) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\angle (P, B, E) = 120^\circ$ ، $\angle (P, D, H) = 100^\circ$ رتب قياسات زوايا $\triangle P, B, D$ تصاعدياً

(٨) في الشكل المقابل :

 P, B, D, E متوازي أضلاع ، $\angle B > \angle E$ أثبت أن : $\angle P + \angle B < \angle D + \angle E$ 

(٩) أكمل ما يلي :

[١] إذا كان : P, B, D أعداد موجبة ، و كان : $B < P$ فإن : $P + D \dots B + D$ [٢] إذا كان : P, B, D أعداد موجبة ، و كان : $B < P$ ، $B < D$ فإن : $P \dots D$ [٣] إذا كان : $\angle (P, B, E) < \angle (P, D, H)$ فإن :مكمل $P \dots$ مكمل D [٤] إذا كانت النقط : P, B, D, E على استقامة واحدة ، و كان $P = 3$ سم ، $B = D = 2$ سم ، $D = E = 4$ سمفإن : $P + D \dots B + E$ [٥] إذا كان : \overline{PE} ينصف $\angle B, P, D$ فإن : $\angle (P, B, E) \dots \angle (P, D, H)$

أحمد الشنتوري

الدرس الثاني : المقارنة بين قياسات الزوايا في المثلث

نعلم أن :

إذا تطابق ضلعان في مثلث فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين تكونان متساويتين في القياس
فإذا كان ΔPBD فيه :

$$PB = PD \quad \text{فإن} \quad \angle B = \angle D \quad \text{و} \quad \angle P = \angle P$$

ملاحظة :

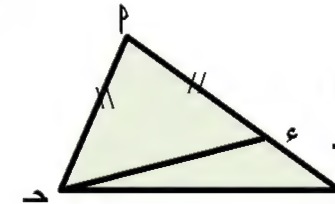
إذا اختلفت أطوال أضلاع المثلث تختلف قياسات زواياه المقابلة لهذه الأضلاع

نظرية :

إذا اختلف طولاً ضلعين في مثلث فأكبرهما في الطول تقابله زاوية أكبر في القياس من قياس الزاوية المقابلة للضلع الآخر

المعطيات : ΔPBD فيه : $PD < PB$
المطلوب : إثبات أن :

$$\angle B < \angle D \quad \text{و} \quad \angle P = \angle P$$



العمل : نأخذ $E \in \overline{BD}$ حيث : $PE \parallel BD$
البرهان : $\because \Delta PDE$ فيه : $PD = PE$

$$\therefore \angle B = \angle D \quad \text{و} \quad \angle P = \angle P \quad (1)$$

$$\because \angle B < \angle D \quad \text{عن} \quad \Delta PDE$$

$$\therefore \angle B < \angle D \quad \text{و} \quad \angle P = \angle P \quad (2)$$

من (1) ، (2) ينتج : $\angle B < \angle D$ و $\angle P = \angle P$

$$\therefore \angle B < \angle D \quad \text{و} \quad \angle P = \angle P$$

$$\therefore \angle B < \angle D \quad \text{و} \quad \angle P = \angle P$$

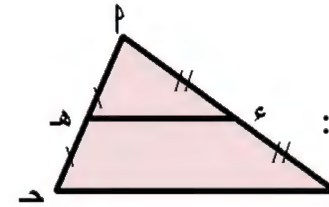
ملاحظات :

- (1) أكبر زوايا المثلث في القياس تقابل أكبر أضلاع المثلث طولاً
و يكون قياسها أكبر من 60°
(2) أصغر زوايا المثلث في القياس تقابل أصغر أضلاع المثلث طولاً.
و يكون قياسها أقل من 60°



- (1) في الشكل المقابل :
 ΔPBD فيه : $PD < PB$
أثبت أن :
 $\angle B < \angle D$ و $\angle P = \angle P$

(٢) في الشكل المقابل :

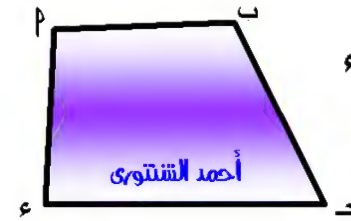
 ΔP فيه : $PH < PD$ ، $PE = EH$ ، $PH = HD$ أثبت أن : $\angle (PEH) < \angle (PHD)$

(٣) في الشكل المقابل :

 ΔP فيه : $PH = 3$ سم $PD = 4$ سم ، $DE = 7$ سم $PE = 6$ سم أثبت أن : $\angle (PEH) < \angle (PHD)$

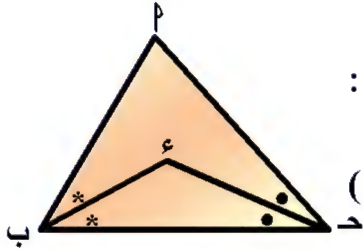
أحمد الشنتوي

(٤) في الشكل المقابل :



$\angle ب د ع = \angle ب د ح$: شكل رباعي فيه :
 $\angle د < \angle ب$ أثبت أن :
 $\angle د < \angle ب$ و $\angle د < \angle ح$

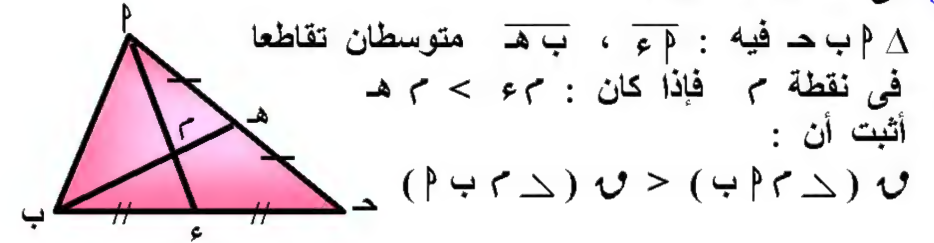
(٥) في الشكل المقابل :



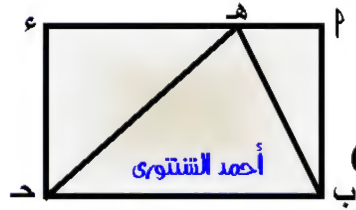
$\angle ب د ح$ مثلث ، $\angle ب د ع$ ينصف $\angle ب د ح$
 $\angle د ب ح$ ينصف $\angle ب د ح$ فإذا كان :
 $\angle د < \angle ب$ أثبت أن :
 $\angle د < \angle ب$ و $\angle د < \angle ح$

أحمد الشنتوري

(٦) في الشكل المقابل :



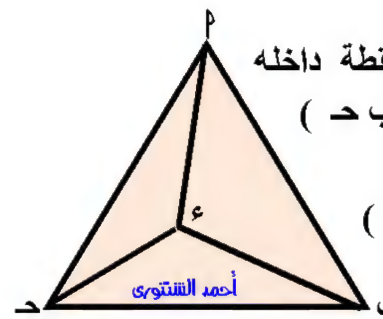
(٧) في الشكل المقابل :



$\angle (PMB) > \angle (PME)$ و $\angle (PME) > \angle (PMB)$
بحيث : $\angle H < \angle B$ أثبت أن :
 $\angle (PMB) > \angle (PME)$ و $\angle (PME) > \angle (PMB)$
أثبت أن : $\angle H < \angle B$ أثبت أن :
 $\angle (PMB) > \angle (PME)$ و $\angle (PME) > \angle (PMB)$

أحمد الشنتوري

(٨) في الشكل المقابل :



Δ م ب د متساوي الأضلاع ، ء نقطة داخله

$$v_{\Delta \epsilon \beta} < v_{\Delta \epsilon \gamma} \quad (\Delta \epsilon \beta \gamma)$$

أثبت أن :

$$(e \supset p) \vee (e \supset \neg p) < (e \supset p) \vee (e \supset \neg p) \vee (e \supset \neg p)$$
$$(\neg p \mid \neg) \cup (\neg p \mid \neg),$$
$$v < (p \rightarrow e)$$

(۹) أكمل ما يلي :

11 أصغر زوايا المثلث في القياس تقابل الأضلاع طويلاً

❏ إذا اختلف طولا ضلعين في مثلث فأكبرهما في الطول تقابله زاوية

.... في القياس من قياس الزاوية التي تقابل الضلع الآخر

[٣] قياس أكبر زاوية في المثلث $< ١٨٠^\circ$

[٤] قياس أصغر زاوية في المثلث ٦. °

[5] في Δ $AB \perp CD$ إذا كان : $AB < CD$ $\angle B < \angle C$ فإن :

$$(\dots \rhd) \mathfrak{v} < (\dots \rhd) \mathfrak{v} < (\dots \rhd) \mathfrak{v}$$

(١٠) أختَر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[۱] فی Δ \mathcal{M} \mathcal{B} \mathcal{C} إذا كان : $\mathcal{M} \mathcal{B} < \mathcal{B} \mathcal{C}$ فإن :

$$(\equiv, =, >, <) \quad (\supset, \supseteq) \vee \dots (\mathbb{P}, \supseteq) \vee$$

[٢] في Δ ب ح إذا كان : $\text{ب} = ٣$ سم ، $\text{ب ح} = ٤$ سم

، $\mu = 0$ سم فان :

$$, (\text{ب} \supset) \psi < (\text{پ} \supset) \psi, (\text{پ} \supset) \psi < (\text{ب} \supset) \psi)$$
$$((\supset \supset) \psi) = (\text{p}\supset) \psi, (\text{p}\supset) \psi < (\supset \supset) \psi$$

[٣] في Δ س ص ع المنفرج الزاوية في س ، س ع \perp ص ع

فَإِنْ : وَ (أَص) وَ (أَص ع س)

 $(\equiv, =, >, <)$

الدرس الثالث : المقارنة بين أطوال الأضلاع في المثلث

نعلم أن :

إذا تساوى قياسا زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متساويتين في الطول
فإذا كان ΔP ب د فيه :

$$\angle (ب د) = \angle (د ب) \text{ فإن } P ب = P د$$

ملاحظة :

إذا اختلفت قياسات زوايا المثلث تختلف أطوال الأضلاع المقابلة لهذه الزوايا

نظرية :

إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث فأكبرهما في القياس يقابلها ضلع أكبر في الطول من الذى يقابل الأخرى

المعطيات : ΔP ب د فيه $\angle (د ب) < \angle (ب د)$

المطلوب : إثبات أن : $P ب < P د$

البرهان : $\because P ب$ ، $P د$ قطع مستقيمة

\therefore يجب أن نتحقق إحدى الحالات :

$$(1) P ب > P د \quad (2) P ب = P د \quad (3) P ب < P د$$

إذا لم تكن $P ب < P د$ فإما $P ب = P د$ أو $P ب > P د$

إذا كان : $P ب = P د$ فإن : $\angle (د ب) = \angle (ب د)$

وهذا يخالف المعطيات حيث أن : $\angle (د ب) < \angle (ب د)$

و إذا كان : $P ب > P د$ فإن : $\angle (د ب) > \angle (ب د)$

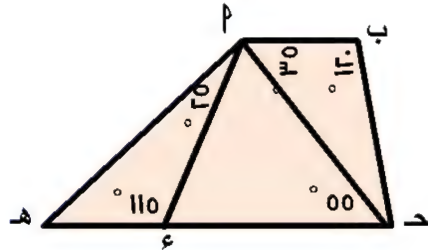
حسب النظرية السابقة و هذا يخالف المعطيات

حيث أن : $\angle (د ب) < \angle (ب د)$

\therefore يجب أن يكون : $P ب < P د$

أحمد الشنتوري

(1) فى الشكل التالى أكمل ما يلى مستخدماً علامة (> أو <) :



$$[1] ب د \dots P ب$$

$$[2] د ب \dots P د$$

$$[3] P ب \dots P د$$

$$[4] د ب \dots P د$$

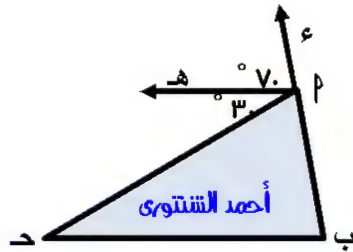
(2) فى الشكل المقابل :

$$P ب \parallel P د$$

$$\angle (د ب) = 70^\circ$$

$$\angle (ب د) = 30^\circ$$

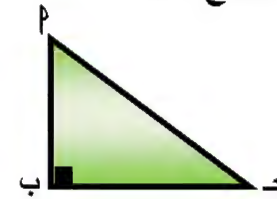
أثبت أن : $P ب < P د$



أحمد الشنتوري

نتيجة (١) :

في المثلث القائم الزاوية يكون الوتر هو أطول أضلاع المثلث
ففي الشكل المقابل :



ΔPBD قائم الزاوية في ب

$\therefore PD > PB$ حادة $\therefore \angle P < \angle B$ و $\angle D < \angle B$

فيكون : $PD > BD$ ، $PD > PB$

$\therefore PD > BD$ حادة $\therefore \angle P < \angle B$ و $\angle D < \angle B$

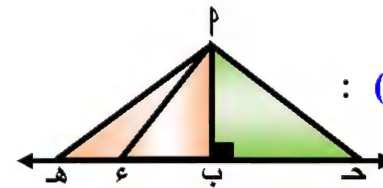
فيكون : $PD > PB$

ملاحظة :

في المثلث المنفرج الزاوية يكون الضلع المقابل للزاوية المنفرجة
هو أكبر أضلاع المثلث طولاً

نتيجة (٢) :

طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة خارج مستقيم
معلوم إلى هذا المستقيم أصغر من طول أي قطعة مستقيمة مرسومة
من هذه النقطة إلى المستقيم المعلوم
ففي الشكل المقابل :



$PB \perp HD$ فيكون حسب نتيجة (١) :

(١) من ΔPBD : $PD > PB$

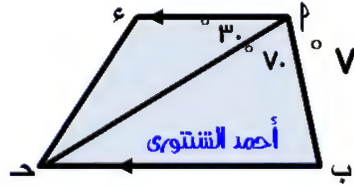
(٢) من ΔPBE : $PE > PB$

(٣) من ΔPHD : $PH > PB$

تعريف :

بعد أي نقطة عن مستقيم معلوم هو طول القطعة المستقيمة العمودية
المرسومة من النقطة إلى المستقيم المعلوم
ففي الشكل السابق :
بعد نقطة P عن \overleftrightarrow{BD} هو طول \overline{PB}

(٣) في الشكل المقابل :



$\overline{PE} \parallel \overline{PD}$ ، $\angle PEA = \angle PDC$

، $\angle PED = \angle PDC$

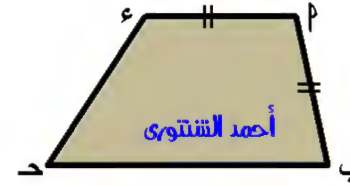
أثبت أن : $PD < PB$

أحمد الشنتوي

(٤) في الشكل المقابل :

$$P = B, \quad E$$

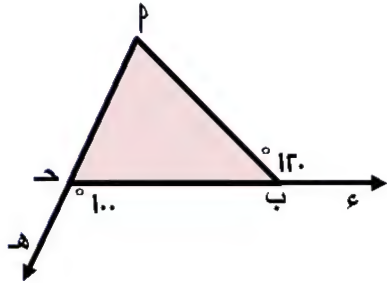
$$P < (B, D) \text{ و } (E, D) < P$$

أثبت أن : $B < D < E$ 

(٦) في الشكل المقابل :

$$P = (B, E) = 120^\circ$$

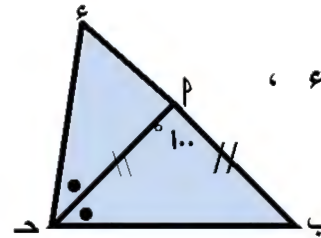
$$P = (B, D) = 100^\circ$$

أثبت أن : $B > D > P$ 

(٥) في الشكل المقابل :

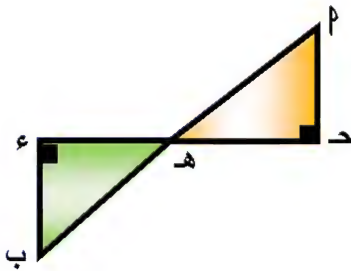
$$P = B, \quad D \text{ ينصف } B, \quad E$$

$$P = (B, D) = 100^\circ$$

أثبت أن : $B < D < E$ 

(٧) في الشكل المقابل :

$$P = (B, E) = (D, E) = 90^\circ$$

أثبت أن : $B < D < E$ 

$$(٨) \Delta PBD \text{ فيه : } \angle P = (٢٠ + س)^\circ , \angle B = (١٠ - س)^\circ , \angle D = (٢٠ + س)^\circ$$

رتب أطوال أضلاع ΔPBD تصاعدياً

(١٠) أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] في ΔPBD إذا كان : $\angle P < \angle B$ ، $\angle D < \angle B$: فإن :

($PD < PB$ ، $PD > PB$ ، $PD = PB$ ، $PD < PB$)

[٢] في ΔPBD إذا كان : $\angle P = ٩٠^\circ$: فإن :

($PD < PB$ ، $PD > PB$ ، $PD = PB$ ، $PD < PB$)

[٣] في ΔPBD إذا كان : $\angle P = ٦٥^\circ$ ،

$\angle D = ٥٠^\circ$: فإن : أصغر الأضلاع طولاً هو

(\overline{PD} ، \overline{PB} ، \overline{BD} ، \overline{PB})

[٤] في ΔPBD إذا كان : $\angle P = ٦٥^\circ$ ،

$\angle D = ٧٥^\circ$: فإن :

($PD < PB$ ، $PD > PB$ ، $PD = PB$ ، $PD < PB$)

[٥] في ΔPBD إذا كان : $\angle P = ٣٠^\circ$ ، $\angle D = ٣٠^\circ$:

فإن : PD BD

($<$ ، $>$ ، $=$ ، \equiv)

[٦] في ΔPBD إذا كان : $\angle P < \angle B$ ، $\angle D < \angle B$:

فإن : PD BD

($<$ ، $>$ ، $=$ ، \equiv)

(٩) أكمل ما يلي :

[١] أصغر زوايا المثلث في القياس يقابلها الأضلاع طولاً

[٢] أكبر أضلاع المثلث القائم الزاوية طولاً هو

[٣] في ΔPBD إذا كان : $\angle P = ٥٠^\circ$ ، $\angle D = ٣٠^\circ$:

فإن أصغر أضلاع المثلث طولاً هو

[٤] في ΔPBD إذا كان : $\angle P = ٥٠^\circ$ ، $\angle D = ٣٠^\circ$:

فإن أكبر أضلاع المثلث طولاً هو

[٥] في ΔPBD إذا كان : $\angle P = ١١٠^\circ$ ، $\angle D = ١١٠^\circ$:

فإن أكبر أضلاع المثلث طولاً هو

أحمد الشنتوري

الدرس الرابع : متباينة المثلث المثلث

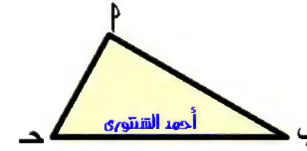
حقيقة :

فى أى مثلث يكون مجموع طولى أى ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث
أى أنه : فى أى $\triangle PAB$ يكون :

$$PA + PB > AB$$

$$PA + AB > PB$$

$$PB + AB > PA$$



ملاحظة (١) :

لبحث صلاحية أى ثلاثة أعداد لأن تكون أطوال أضلاع مثلث
نجمع أصغر عددين منهم و نقارن مجموعهما بالعدد الثالث فإذا كان :

(١) مجموعهما أصغر من أو يساوى العدد الثالث

فإن هذه الأعداد لا تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

(٢) إذا كان مجموعهما أكبر من العدد الثالث

فإن هذه الأعداد تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

فمثلاً :

(١) الأعداد : ٧ ، ١١ ، ٤ لا تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

$$11 = 7 + 4$$

(٢) الأعداد : ٣ ، ٨ ، ١٣ لا تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

$$13 > 11 = 8 + 3$$

(٣) الأعداد : ١٤ ، ٧ ، ٩ تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

$$14 < 16 = 7 + 9$$

ملاحظة (٢) :

من متباينة المثلث نجد أن فى أى ΔPAB يكون :
 $PB + PA < AB$ (١) ، $PA < PB + AB$ ، $PB < PA + AB$ (٢)
 أى أن : $AB < PA + PB$ ، $PA < PB + AB$ ، $PB < PA + AB$
 من (١) ، (٢) ينتج : $AB > PA + PB$ ، $PA > PB + AB$ ، $PB > PA + AB$
 $\therefore AB \in [PA + PB, PA + PB + AB]$

أى أن :
 طول أى ضلع فى المثلث أكبر من الفرق بين طولى الضلعين الآخرين
 و أقل من مجموعهما
فمثلاً :

لإيجاد الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث للمثلث الذى فيه
 طولاً الضلعين الآخرين هما : ٤ سم ، ٣ سم
 نفرض أن : طول الضلع الثالث = l سم
 $\therefore 3 - 4 < l < 3 + 4$
 $\therefore l \in] -1, 7 [$

(٢) أوجد الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث للمثلث الذى فيه
 طولاً الضلعين الآخرين هما : ٥ سم ، ٨ سم

(٣) أكمل ما يلى :

- [١] فى أى مثلث يكون مجموع طولى أى ضلعين طول الضلع الثالث
 [٢] فى ΔPAB يكون : $AB < PA + PB$
 [٣] إذا كان طولاً ضلعين فى مثلث هما : ٤ سم ، ٩ سم
 فإن : أصغر عدد صحيح يمثل طول الضلع الثالث = سم
 [٤] إذا كان طولاً ضلعين فى مثلث هما : ٥ سم ، ٨ سم
 فإن : أكبر عدد صحيح يمثل طول الضلع الثالث = سم
 [٥] إذا كان طولاً ضلعين فى مثلث متساوى الساقين هما :
 ٤ سم ، ٨ سم فإن : طول الضلع الثالث = سم
 [٦] إذا كان طولاً ضلعين فى مثلث هما : ٤ سم ، ٧ سم
 فإن : الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث =
 [٧] إذا كان طولاً ضلعين فى مثلث هما : ٤,٥ سم ، ٧,٥ سم
 فإن : الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث =
 [٨] إذا كان طولاً ضلعين فى مثلث هما : $2\sqrt{2}$ سم ، $5\sqrt{2}$ سم
 فإن : الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث =

(٤) أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] طول أى ضلع الثالث في مثلث مجموع طولى الضلعين الآخرين

(أصغر من ، أكبر من ، يساوى ، ضعف)

[٢] إذا كان : طولاً ضلعين في مثلث هما : ٤ سم ، ٧ سم فإن :

طول الضلع الثالث يمكن أن يكون سم

(١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)

[٣] إذا كان : طولاً ضلعين في مثلث متساوى الساقين هما : ٢ سم ،

٥ سم فإن : طول الضلع الثالث = سم

(٧ ، ٥ ، ٣ ، ٢)

[٤] مثلث طولاً ضلعين فيه هما : ٤ سم ، ٩ سم وله محور تماثل

واحد فإن : طول الضلع الثالث = سم

(٤ ، ٥ ، ٩ ، ١٣)

[٥] مجموعة الأعداد التى تصلح أن تكون أطوال مثلث هى

{ ٧ ، ٣ ، ٣ } ، { ٦ ، ٣ ، ٣ } ، { ٥ ، ٣ ، ٠ })

({ ٥ ، ٣ ، ٣ } ،

[٦] إذا كان : طولاً ضلعين في مثلث هما : ٥ سم ، ١٠ سم فإن :

طول الضلع الثالث \supseteq

([١٥ ، ٥] ، [١٥ ، ١] ، [١٥ ، ٥] ، [١٥ ، ٥])

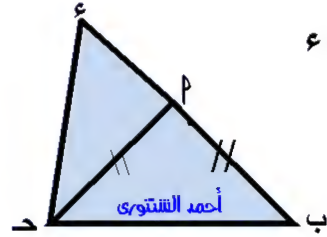
[٧] الأعداد : ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٧ تصلح أن تكون أطوال أضلاع

مثلث إذا كانت س =

(صفر ، ١ ، ٢ ، ٤)

(٥) فى الشكل المقابل :

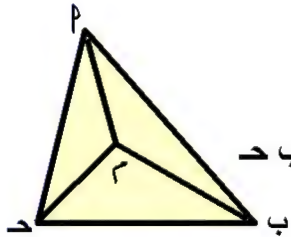
ب = ٢ = ٣ أثبت أن : ب < ٤



(٦) فى الشكل المقابل :

م نقطة داخل $\triangle بـدـع$ أثبت أن :

$٢م + ب + د < \frac{1}{٢}$ محيط $\triangle بـدـع$



أحمد الشنتوري

(٧) برهن أن :

طول أي ضلع في مثلث أصغر من نصف محيط المثلث

(٩) برهن أن :

مجموع طولى قطري أى شكل رباعى محدب أصغر من محيط الشكل

أحمد الشنتوري

(٨) برهن أن :

محيط أى شكل رباعى أصغر من ضعف مجموع طولى قطريه



اجوبة بعض التمارين

الأعداد الحقيقية

الوحدة الأولى

الدرس الأول : الجذر التكعيبي للعدد النسبي

| | | | | | |
|---------------|------------------|----------------|----------------|---------------------|--------------------|
| العدد p | ٢٧ | ٨ - | ١٢٥ - | ٢١٦ | ٤ |
| $\sqrt[3]{p}$ | ٣ | ٢ - | ٥ - | ٦ | $\sqrt[3]{4}$ |
| العدد p | $\frac{1}{64}$ - | $-\frac{1}{8}$ | $-\frac{3}{8}$ | $-\frac{125}{1000}$ | $-\frac{216}{343}$ |
| $\sqrt[3]{p}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{5}{10}$ | $-\frac{6}{7}$ |

$$(٢) \quad ٣ - [١] \quad ٦٤ [٢] \quad ٥ [٣] \quad ٠ [٤] \quad ٦٤ [٤] \quad ٤ [٥] \quad ٤ [٦] \quad ٢ - ٢ = \text{صفر}$$

$$[٧] \quad ٥ = ٢ + ٣ \quad [٨] \quad ٤ = ٤ - ٨ \quad [٩] \quad ٦١$$

$$(٣) \quad [١] \quad ٤ \quad [٢] \quad \frac{1}{4} \quad [٣] \quad ٢ \quad [٤] \quad ٢$$

$$[٥] \quad ٢ \quad [٦] \quad ٢ \quad [٧] \quad ٨ \quad [٨] \quad ١٠$$

بضرب الطرفين $\times (٣)$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

بإضافة (٧) للطرفين

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{ ٣ \}$$

$$(٤) \quad [١] \quad \frac{1}{3} = ٣ \quad \frac{27}{64} = ٣$$

$$\therefore ٣ = ٣$$

$$\therefore ٣ = ٣$$

$$[٢] \quad \therefore ٢٠ = ٧ - ٣$$

$$\therefore ٢٧ = ٣$$

$$\therefore ٣ = ٣$$

$$[٣] \quad \therefore ٨ = ٧ + ٣$$

$$\therefore ٨ = ٣$$

$$\therefore \frac{1}{8} = ٣$$

$$\therefore \frac{1}{3} = ٣$$

$$[٤] \quad \therefore ٦٤ = ٣ (٢ - ٣)$$

$$\therefore ٤ = ٢ - ٣$$

$$\therefore ٦ = ٣$$

$$[٥] \quad \therefore ٨ = ٣ (١ - ٣)$$

$$\therefore ٢ = ١ - ٣$$

$$\therefore ١ = ٣ -$$

$$\therefore ١ - = ٣$$

بإضافة (٧) للطرفين

بقسمة الطرفين على (٨)

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

بإضافة (٢) للطرفين

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{ ١ - \}$$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

بإضافة (١) للطرفين

بقسمة الطرفين على (١ -)

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{ ١ - \}$$

$$[٦] \quad \therefore ٣٠ = ٣ + ٣ (٢ - ٣) \quad \text{بإضافة (٣) للطرفين}$$

$$\therefore ٢٧ = ٣ (٢ - ٣) \quad \text{بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين}$$

$$\therefore ٣ = ٢ - ٣ \quad \text{بإضافة (٢) للطرفين}$$

$$\therefore ٥ = ٣ - ٥ \quad \text{بقسمة الطرفين على (٥)}$$

$$\therefore ١ = ٣ \quad \therefore \text{مجموعة الحل} = \{ ١ \}$$

$$(٥) \quad \therefore \text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \therefore \frac{4}{3} \pi \left(\frac{3}{2} \right)^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{3}{2} \right)^3$$

$$\therefore \frac{4}{3} \pi \left(\frac{3}{2} \right)^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{3}{2} \right)^3 \quad \text{بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين}$$

الدرس الثالث : إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبي

$$(1) \quad 1, 3 \quad [1] \quad 4, 0 \quad [2] \quad 6, 0 \quad [3] \quad 3 - , 2 - [3] \quad 4 [4] \quad 0$$

$$(2) \quad 1 [1] \quad 9 > 0 > 4 \quad \therefore \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للأطراف}$$

$$\therefore 2 < \sqrt{0} < 3 \quad \text{أي أن : } \sqrt{0} = 0 = 2 + \text{كسر عشري}$$

$$\text{و بالتجريب : } (2, 2), (2, 3) \quad \text{نجد :}$$

$$0, 29 = (2, 3) \quad , \quad 4, 84 = (2, 2)$$

$$\therefore 4, 84 > 0 > 0, 29 \quad \text{و بأخذ الجذر التربيعي}$$

$$\therefore 2, 2 < \sqrt{0} < 2, 3 \quad \text{ينحصر بين } 2, 2, 2, 3$$

$$\therefore \sqrt{0} = 2, 2 \quad \text{لأقرب جزء من عشرة}$$

$$[2] \quad 16 > 11 > 9 \quad \therefore \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للأطراف}$$

$$\therefore 3 < \sqrt{11} < 4 \quad \text{أي أن : } \sqrt{11} = 3 + \text{كسر عشري}$$

$$\text{و بالتجريب : } (3, 31), (3, 32) \quad \text{نجد :}$$

$$11, 0224 = (3, 32) \quad , \quad 10, 9071 = (3, 31)$$

$$\therefore 11, 0224 > 11 > 10, 9071 \quad \text{و بأخذ الجذر التربيعي}$$

$$\therefore 3, 31 < \sqrt{11} < 3, 32 \quad \text{ينحصر بين } 3, 31, 3, 32$$

$$\therefore \sqrt{11} = 3, 31 \quad \text{لأقرب جزء من مائة}$$

$$[3] \quad 8 > 2 > 1 \quad \therefore \quad \text{بأخذ الجذر التكعيبي للأطراف}$$

$$\therefore 1 < \sqrt[3]{2} < 2 \quad \text{أي أن : } \sqrt[3]{2} = 1 + \text{كسر عشري}$$

$$\text{و بالتجريب : } (1, 2), (1, 3) \quad \text{نجد :}$$

$$1, 728 = (1, 2) \quad , \quad 2, 197 = (1, 3)$$

$$\therefore 1, 728 > 2 > 2, 197 \quad \text{و بأخذ الجذر التكعيبي}$$

$$\therefore 1, 2 < \sqrt[3]{2} < 1, 3 \quad \therefore \quad \text{ينحصر بين } 1, 2, 1, 3$$

$$\therefore \sqrt[3]{2} = 1, 2 \quad \text{لأقرب جزء من عشرة}$$

$$(3) \quad 2 [1] \quad 0 [2] \quad 8 [3] \quad 1 [4] \quad 2 [5] \quad 4 [6]$$

$$(4) \quad 7 \sqrt[3]{- [2]} \quad 3, 17 [3] \quad 3 [4]$$

$$(5) \quad 0 \sqrt[3]{\quad} \quad \text{ينحصر بين } 2, 24, 2, 25$$

$$\therefore 0 = \sqrt[3]{0} \times \sqrt[3]{0} \times \sqrt[3]{0} = \sqrt[3]{(0)}$$

$$4, 9729 = (2, 23) \quad , \quad 0, 176 = (1, 8)$$

$$\therefore 4, 9729 > 0 > 0, 176 \quad \text{و بأخذ الجذر التربيعي}$$

$$\therefore 2, 24 < \sqrt{0} < 2, 25$$

$$\text{أي أن : } \sqrt{0} \quad \text{ينحصر بين } 2, 24, 2, 25$$

$$[2] \quad 11 = \sqrt[3]{11} \times \sqrt[3]{11} \times \sqrt[3]{11} = \sqrt[3]{(11)}$$

$$10, 941048 = (2, 22) \quad , \quad 11, 089067 = (2, 23)$$

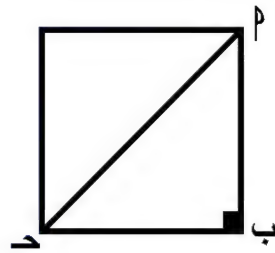
$$\therefore 11, 089067 > 11 > 10, 941048 \quad \text{و بأخذ الجذر التكعيبي}$$

$$\therefore 2, 22 < \sqrt[3]{11} < 2, 23$$

$$\text{أي أن : } \sqrt[3]{11} \quad \text{ينحصر بين } 2, 22, 2, 23$$

$$(6) \quad [1] \quad \text{ارسم بنفسك مركزاً سن الفرجار في نقطة (و)}$$

$$\text{و ارسم قوساً على يمين النقطة هذه النقطة}$$



$$\therefore 1.0 = \text{ل}$$

$$\therefore 1.0 \sqrt{\text{سم}} = \text{ل}$$

أي أن : طول ضلع المربع = $1.0 \sqrt{\text{سم}}$

$$\therefore \Delta \text{ ب ح د فيه : } \angle \text{ب} = 90^\circ$$

$$\therefore \text{ل}(\text{ب ح د}) + \text{ل}(\text{ب ح د}) = \text{ل}(\text{ب ح د})$$

$$2.0 = 1.0 + 1.0 = \text{ل}(\sqrt{1.0}) + \text{ل}(\sqrt{1.0}) =$$

$$\therefore 2.0 \sqrt{\text{سم}} = \text{ل}$$

أي أن : طول قطر المربع = $2.0 \sqrt{\text{سم}}$

$$(9) \therefore \text{محيط الدائرة} = 2\pi \text{ ل}$$

$$\therefore 2\pi \sqrt{0} = 2\pi \text{ ل} \quad \text{لأن : } \pi \sqrt{0} = \pi \text{ ل}$$

$$\text{ل} = \sqrt{0} \text{ سم}$$

$$\text{مساحة سطح الدائرة} = \pi \text{ ل} = \pi \times (\sqrt{0}) = \pi \text{ سم}$$

الدرس الرابع : مجموعة الأعداد الحقيقية ح

$$(1) \text{ ح } [1] \text{ ح } [2] \text{ ح } [3] \text{ ح } [4] \text{ ح } [5] \text{ ح } [6] \text{ ح}$$

(2) أجب بنفسك

$$(3) \text{ ح } [1] \text{ ح } [2] \text{ ح } [3] \text{ ح } [4] \text{ ح}$$

(4) أجب بنفسك

$$\text{حيث : طول الوتر للمثلث} = \frac{1}{4} = (1 + 3)$$

$$\text{، طول الضلع الآخر للقائمة} = \frac{1}{4} = (1 - 3)$$

[2] ارسم بنفسك مركزاً سن الفرجار في نقطة (و)

و ارسم قوساً على يسار النقطة هذه النقطة

$$\text{حيث : طول الوتر للمثلث} = \frac{1}{4} = (1 + 7)$$

$$\text{، طول الضلع الآخر للقائمة} = \frac{1}{4} = (1 - 7)$$

[3] ارسم بنفسك مركزاً سن الفرجار في النقطة التي تمثل العدد 1

و ارسم قوساً على يسار النقطة هذه النقطة

$$\text{حيث : طول الوتر للمثلث} = \frac{1}{4} = (1 + 6)$$

$$\text{، طول الضلع الآخر للقائمة} = \frac{1}{4} = (1 - 6)$$

[4] ارسم بنفسك مركزاً سن الفرجار في النقطة التي تمثل العدد 1

و ارسم قوساً على يمين النقطة هذه النقطة

$$\text{حيث : طول الوتر للمثلث} = \frac{1}{4} = (1 + 0)$$

$$\text{، طول الضلع الآخر للقائمة} = \frac{1}{4} = (1 - 0)$$

(7) ارسم بنفسك ، يكون : $\text{ل} = \sqrt{13}$ لأن :

$$13 = \text{ل}(\text{ب ح د}) + \text{ل}(\text{ب ح د}) = \text{ل}(\text{ب ح د}) + \text{ل}(\text{ب ح د}) = \text{ل}(\text{ب ح د})$$

ثم أكمل

(8) نفرض أن : طول ضلع المربع = ل سم

$$\therefore \text{مساحته} = \text{ل}^2$$

الدرس الخامس : علاقة الترتيب في ح

(١) رتب الأعداد تصاعدياً :

$$\sqrt[3]{1} = 1, \quad \sqrt[3]{-1} = -1 = \sqrt[3]{-1}^3$$

الترتيب تصاعدياً : $-\sqrt{20}$ ، -1 ، $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{27}$ ، 7

$$\sqrt[9]{-} = \sqrt[13]{-} = \sqrt[17]{-} \quad (7)$$

الترتيب تنازلياً : $\sqrt{11}$ - ، $\sqrt{9}$ - ، $\sqrt{5}$ - ، $\sqrt{8}$ ، $\sqrt{10}$:

$$\langle 1 \rangle \quad \langle 0 \rangle \quad \langle 2 \rangle \quad \langle 3 \rangle = \langle 1 \rangle \quad \langle 1 \rangle \quad \langle 3 \rangle$$

(٤) [١] موجبة [٢] سالبة [٣] موجبة [٤] سالبة [٥] موجبة [٦] موجبة

(0) أكتب عدد نسبي و أربعة أعداد غير نسبية تنحصر بين 0 ، ٧

$$\Sigma 9 = \begin{pmatrix} 1 \\ V \end{pmatrix}, \quad \Gamma 0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \because$$

∴ الأعداد : ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ... ، ٣٦ ، ... ، ٤٨

تتخصر بين ٢٥ ، ٤٩ أى أن :

الأعداد : $\sqrt{27}$ ، $\sqrt{28}$ ، ، $\sqrt{36}$ ، ، $\sqrt{48}$

تنحصر بين 0 ، ٧ فيكون : العدد النسبي هو : $\sqrt{36} = 6$

و الأربعة أعداد النسبية هي : $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{17}$ ، $\sqrt{28}$ ، $\sqrt{48}$:

توجد أعداد أخرى

(٦) بتربيع و تكعيب الطرفين ينتج :

$$\Lambda = \sqrt[r]{\Gamma} = \sqrt[r]{\left(\sqrt[r]{\Gamma}\right)^r} \quad , \quad 9 = \sqrt[r]{\Psi} = \sqrt[r]{\left(\sqrt[r]{\Psi}\right)^r}$$

$$\sqrt[r]{\Gamma} < \sqrt[r]{\Psi} \quad \therefore \quad \Lambda < 9 \quad \therefore ,$$

الدرس السادس : الفترات

$$\{s : s \in \mathcal{H}, s \geq 4 - \epsilon\} \quad (11)$$

[۲] $\{s : s \in \mathcal{H}, s > \tau > \nu\}$ ، مثل بنفسك

مثلاً بنفستك [۱] [۲] [۳] ، [۴] [۵] [۶] [۷] [۸] [۹] [۱۰] [۱۱] [۱۲] [۱۳] [۱۴] [۱۵] [۱۶] [۱۷] [۱۸] [۱۹] [۲۰] [۲۱] [۲۲] [۲۳] [۲۴] [۲۵] [۲۶] [۲۷] [۲۸] [۲۹] [۳۰] [۳۱] [۳۲] [۳۳] [۳۴] [۳۵] [۳۶] [۳۷] [۳۸] [۳۹] [۴۰] [۴۱] [۴۲] [۴۳] [۴۴] [۴۵] [۴۶] [۴۷] [۴۸] [۴۹] [۵۰] [۵۱] [۵۲] [۵۳] [۵۴] [۵۵] [۵۶] [۵۷] [۵۸] [۵۹] [۶۰] [۶۱] [۶۲] [۶۳] [۶۴] [۶۵] [۶۶] [۶۷] [۶۸] [۶۹] [۷۰] [۷۱] [۷۲] [۷۳] [۷۴] [۷۵] [۷۶] [۷۷] [۷۸] [۷۹] [۸۰] [۸۱] [۸۲] [۸۳] [۸۴] [۸۵] [۸۶] [۸۷] [۸۸] [۸۹] [۹۰] [۹۱] [۹۲] [۹۳] [۹۴] [۹۵] [۹۶] [۹۷] [۹۸] [۹۹] [۱۰۰] [۱۰۱] [۱۰۲] [۱۰۳] [۱۰۴] [۱۰۵] [۱۰۶] [۱۰۷] [۱۰۸] [۱۰۹] [۱۱۰] [۱۱۱] [۱۱۲] [۱۱۳] [۱۱۴] [۱۱۵] [۱۱۶] [۱۱۷] [۱۱۸] [۱۱۹] [۱۲۰] [۱۲۱] [۱۲۲] [۱۲۳] [۱۲۴] [۱۲۵] [۱۲۶] [۱۲۷] [۱۲۸] [۱۲۹] [۱۳۰] [۱۳۱] [۱۳۲] [۱۳۳] [۱۳۴] [۱۳۵] [۱۳۶] [۱۳۷] [۱۳۸] [۱۳۹] [۱۴۰] [۱۴۱] [۱۴۲] [۱۴۳] [۱۴۴] [۱۴۵] [۱۴۶] [۱۴۷] [۱۴۸] [۱۴۹] [۱۵۰] [۱۵۱] [۱۵۲] [۱۵۳] [۱۵۴] [۱۵۵] [۱۵۶] [۱۵۷] [۱۵۸] [۱۵۹] [۱۶۰] [۱۶۱] [۱۶۲] [۱۶۳] [۱۶۴] [۱۶۵] [۱۶۶] [۱۶۷] [۱۶۸] [۱۶۹] [۱۷۰] [۱۷۱] [۱۷۲] [۱۷۳] [۱۷۴] [۱۷۵] [۱۷۶] [۱۷۷] [۱۷۸] [۱۷۹] [۱۸۰] [۱۸۱] [۱۸۲] [۱۸۳] [۱۸۴] [۱۸۵] [۱۸۶] [۱۸۷] [۱۸۸] [۱۸۹] [۱۹۰] [۱۹۱] [۱۹۲] [۱۹۳] [۱۹۴] [۱۹۵] [۱۹۶] [۱۹۷] [۱۹۸] [۱۹۹] [۲۰۰] [۲۰۱] [۲۰۲] [۲۰۳] [۲۰۴] [۲۰۵] [۲۰۶] [۲۰۷] [۲۰۸] [۲۰۹] [۲۱۰] [۲۱۱] [۲۱۲] [۲۱۳] [۲۱۴] [۲۱۵] [۲۱۶] [۲۱۷] [۲۱۸] [۲۱۹] [۲۲۰] [۲۲۱] [۲۲۲] [۲۲۳] [۲۲۴] [۲۲۵] [۲۲۶] [۲۲۷] [۲۲۸] [۲۲۹] [۲۳۰] [۲۳۱] [۲۳۲] [۲۳۳] [۲۳۴] [۲۳۵] [۲۳۶] [۲۳۷] [۲۳۸] [۲۳۹] [۲۴۰] [۲۴۱] [۲۴۲] [۲۴۳] [۲۴۴] [۲۴۵] [۲۴۶] [۲۴۷] [۲۴۸] [۲۴۹] [۲۵۰] [۲۵۱] [۲۵۲] [۲۵۳] [۲۵۴] [۲۵۵] [۲۵۶] [۲۵۷] [۲۵۸] [۲۵۹] [۲۶۰] [۲۶۱] [۲۶۲] [۲۶۳] [۲۶۴] [۲۶۵] [۲۶۶] [۲۶۷] [۲۶۸] [۲۶۹] [۲۷۰] [۲۷۱] [۲۷۲] [۲۷۳] [۲۷۴] [۲۷۵] [۲۷۶] [۲۷۷] [۲۷۸] [۲۷۹] [۲۸۰] [۲۸۱] [۲۸۲] [۲۸۳] [۲۸۴] [۲۸۵] [۲۸۶] [۲۸۷] [۲۸۸] [۲۸۹] [۲۹۰] [۲۹۱] [۲۹۲] [۲۹۳] [۲۹۴] [۲۹۵] [۲۹۶] [۲۹۷] [۲۹۸] [۲۹۹] [۳۰۰] [۳۰۱] [۳۰۲] [۳۰۳] [۳۰۴] [۳۰۵] [۳۰۶] [۳۰۷] [۳۰۸] [۳۰۹] [۳۱۰] [۳۱۱] [۳۱۲] [۳۱۳] [۳۱۴] [۳۱۵] [۳۱۶] [۳۱۷] [۳۱۸] [۳۱۹] [۳۲۰] [۳۲۱] [۳۲۲] [۳۲۳] [۳۲۴] [۳۲۵] [۳۲۶] [۳۲۷] [۳۲۸] [۳۲۹] [۳۳۰] [۳۳۱] [۳۳۲] [۳۳۳] [۳۳۴] [۳۳۵] [۳۳۶] [۳۳۷] [۳۳۸] [۳۳۹] [۳۴۰] [۳۴۱] [۳۴۲] [۳۴۳] [۳۴۴] [۳۴۵] [۳۴۶] [۳۴۷] [۳۴۸] [۳۴۹] [۳۵۰] [۳۵۱] [۳۵۲] [۳۵۳] [۳۵۴] [۳۵۵] [۳۵۶] [۳۵۷] [۳۵۸] [۳۵۹] [۳۶۰] [۳۶۱] [۳۶۲] [۳۶۳] [۳۶۴] [۳۶۵] [۳۶۶] [۳۶۷] [۳۶۸] [۳۶۹] [۳۷۰] [۳۷۱] [۳۷۲] [۳۷۳] [۳۷۴] [۳۷۵] [۳۷۶] [۳۷۷] [۳۷۸] [۳۷۹] [۳۸۰] [۳۸۱] [۳۸۲] [۳۸۳] [۳۸۴] [۳۸۵] [۳۸۶] [۳۸۷] [۳۸۸] [۳۸۹] [۳۹۰] [۳۹۱] [۳۹۲] [۳۹۳] [۳۹۴] [۳۹۵] [۳۹۶] [۳۹۷] [۳۹۸] [۳۹۹] [۴۰۰] [۴۰۱] [۴۰۲] [۴۰۳] [۴۰۴] [۴۰۵] [۴۰۶] [۴۰۷] [۴۰۸] [۴۰۹] [۴۱۰] [۴۱۱] [۴۱۲] [۴۱۳] [۴۱۴] [۴۱۵] [۴۱۶] [۴۱۷] [۴۱۸] [۴۱۹] [۴۲۰] [۴۲۱] [۴۲۲] [۴۲۳] [۴۲۴] [۴۲۵] [۴۲۶] [۴۲۷] [۴۲۸] [۴۲۹] [۴۳۰] [۴۳۱] [۴۳۲] [۴۳۳] [۴۳۴] [۴۳۵] [۴۳۶] [۴۳۷] [۴۳۸] [۴۳۹] [۴۴۰] [۴۴۱] [۴۴۲] [۴۴۳] [۴۴۴] [۴۴۵] [۴۴۶] [۴۴۷] [۴۴۸] [۴۴۹] [۴۵۰] [۴۵۱] [۴۵۲] [۴۵۳] [۴۵۴] [۴۵۵] [۴۵۶] [۴۵۷] [۴۵۸] [۴۵۹] [۴۶۰] [۴۶۱] [۴۶۲] [۴۶۳] [۴۶۴] [۴۶۵] [۴۶۶] [۴۶۷] [۴۶۸] [۴۶۹] [۴۷۰] [۴۷۱] [۴۷۲] [۴۷۳] [۴۷۴] [۴۷۵] [۴۷۶] [۴۷۷] [۴۷۸] [۴۷۹] [۴۸۰] [۴۸۱] [۴۸۲] [۴۸۳] [۴۸۴] [۴۸۵] [۴۸۶] [۴۸۷] [۴۸۸] [۴۸۹] [۴۹۰] [۴۹۱] [۴۹۲] [۴۹۳] [۴۹۴] [۴۹۵] [۴۹۶] [۴۹۷] [۴۹۸] [۴۹۹] [۵۰۰] [۵۰۱] [۵۰۲] [۵۰۳] [۵۰۴] [۵۰۵] [۵۰۶] [۵۰۷] [۵۰۸] [۵۰۹] [۵۱۰] [۵۱۱] [۵۱۲] [۵۱۳] [۵۱۴] [۵۱۵] [۵۱۶] [۵۱۷] [۵۱۸] [۵۱۹] [۵۲۰] [۵۲۱] [۵۲۲] [۵۲۳] [۵۲۴] [۵۲۵] [۵۲۶] [۵۲۷] [۵۲۸] [۵۲۹] [۵۳۰] [۵۳۱] [۵۳۲] [۵۳۳] [۵۳۴] [۵۳۵] [۵۳۶] [۵۳۷] [۵۳۸

$$\supset [9] \not\supset [8] \not\supset [7] \supset [6] \ni [5] \not\supset [4] \ni [3] \not\supset [2] \ni [1] \text{ (3)}$$

(4) [1] $\{s : s \in \mathcal{H}, s \geq \varepsilon\}$ ، مثل بنفسك

$$\{s : s \in \mathcal{H}, s < \mathcal{I}\} \quad [2]$$

(٥) [١] ، ٤] [٢] - ، ∞ - [٣] ، مثل بنفسك

$$\supset [9] \supset [8] \not\supset [7] \supset [6] \ni [5] \not\supset [4] \not\supset [3] \ni [2] \ni [1] (7)$$

(v) مثل بنفسك ، [۱] - ۲ ، [۲] - ۳ ، [۳] - ۴

$$[2, -1, 2] \quad [3, 1, 2]$$

(٨) مثل بنفسك ، [١] - [٤ ، ٣] [٢] ح

$\left[\begin{array}{c} \text{[3]} \\ \infty, 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{[4]} \\ \infty - 1, \infty \end{array} \right]$

$$[\xi, 1 - [\xi] \{0, 3\} [3]]0, 3 [7] [0, 3] [1] \quad (9)$$

صف [9] \emptyset [7] \cdot [1] $-\infty$ [3] [8] $\{3, \infty\}$ [9] $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100\}$

$$[\Lambda, \Lambda_-] \text{ [3]} \quad [9, \cdot] \text{ [2]} \quad [3, 1] \text{ [1] (b)}$$

[illegible]

$$[y, z] = \varphi \cap \varphi = \varphi : \varphi \cap \varphi =: (10)$$

$$[v, e] = 0 \quad | \quad e = e$$

$$[\varphi, \psi] = \varphi \psi - \psi \varphi = 0.$$

$$[4, 1] = \text{ص} , [6, 2] = \text{س} \quad (12)$$

الدرس السابع : العمليات على الأعداد الحقيقية

(1) (1) صفر [1] $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ [2]

$\sqrt[9]{3} \approx [0; 2, 7]$ $\sqrt[6]{3} \approx [3; 2, 8]$ $\sqrt[3]{3} \approx [1; 1, 2]$ $\sqrt{2} \approx [1; 2, 2]$

الصفحة [٦] [٧] [٨] [٩] [١٠] [١١] [١٢] [١٣] [١٤] [١٥] [١٦] [١٧] [١٨] [١٩] [٢٠] [٢١] [٢٢] [٢٣] [٢٤] [٢٥] [٢٦] [٢٧] [٢٨] [٢٩] [٣٠] [٣١] [٣٢] [٣٣] [٣٤] [٣٥] [٣٦] [٣٧] [٣٨] [٣٩] [٤٠] [٤١] [٤٢] [٤٣] [٤٤] [٤٥] [٤٦] [٤٧] [٤٨] [٤٩] [٥٠] [٥١] [٥٢] [٥٣] [٥٤] [٥٥] [٥٦] [٥٧] [٥٨] [٥٩] [٦٠] [٦١] [٦٢] [٦٣] [٦٤] [٦٥] [٦٦] [٦٧] [٦٨] [٦٩] [٧٠] [٧١] [٧٢] [٧٣] [٧٤] [٧٥] [٧٦] [٧٧] [٧٨] [٧٩] [٨٠] [٨١] [٨٢] [٨٣] [٨٤] [٨٥] [٨٦] [٨٧] [٨٨] [٨٩] [٩٠] [٩١] [٩٢] [٩٣] [٩٤] [٩٥] [٩٦] [٩٧] [٩٨] [٩٩] [١٠٠]

$$1. \quad [r] \quad \sqrt{0} \quad 1. - [1] \quad (3)$$

17 [0] F. [Σ] $\sqrt{\Gamma}$ F [Σ] \sqrt{F} [Γ] V [1] (Σ)

$$0 \sqrt{\Sigma} + 9 \text{ [9]} \quad 1 \text{ [8]} \quad \sqrt{\Sigma} \sqrt{\Sigma} - 7 \text{ [5]} \quad 1 \sqrt{\Sigma} + 0 \text{ [7]}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{r - \sqrt[3]{r}} + \sqrt[3]{r + \sqrt[3]{r}} = \sqrt[3]{r} + \sqrt[3]{r} \quad [1] \quad (0)$$

$$1 - \sqrt{5} = 2 - 3 = (2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}) = -1 \quad [2]$$

$$16 = {}^1(2) = {}^1(s - s) = {}^1s + {}^2s - {}^1s \quad [3]$$

$$\sqrt[3]{x} + v = r(r + \sqrt[3]{x}) = r$$

$$\overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{r}} \Sigma - V = \mathfrak{r}(\mathfrak{r} - \overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{r}}) = \mathfrak{r} \mathfrak{v} ,$$

$$\Gamma - = (1 -) \times \Gamma = \text{ص } \Gamma ،$$

$$17 = \sqrt{3} \sqrt{2 - V} + (2 -) - \sqrt{3} \sqrt{2 + V} = \text{المقدار} \therefore$$

(٦) تقدير $\sqrt{1.}$ هو : ٣ لأن : $\sqrt{9} = ٣$

∴ تقدير $(0 + \sqrt{1})$ هو : $0 + 1 = 1$

، تقدير $\sqrt[3]{7}$ هو ٢ لأن : $\sqrt[3]{8} = ٢$

∴ تقطير $(\sqrt{v} - 4)$ هو : $1 = 2 - 4$

∴ تقدير $(\sqrt[3]{1.0} - 3)(\sqrt[3]{1.0} + 0)$ هو $\Delta = 1 \times \Delta$

و باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن الناتج هو : ٨,٨٧٢٩

أى أن التقدير مقبول

(v) تقدير $\sqrt{10}$ هو : ϵ لأن : $\sqrt{17} = \epsilon$

∴ تقدير $(\sqrt{10} + 2)$ هو : $2 + 3 = 5$

، تقدير $\sqrt[3]{20}$ هو ٣ لأن : $\sqrt[3]{27} = ٣$

∴ تقدیر $(\sqrt[3]{20} - 4)$ هو : $3 - 4 = 1$

∴ تقدير $(\sqrt[3]{10} - 2)(\sqrt{10} + 2)$ هو : $1 \times 1 = 1$

و باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن الناتج هو : ٦,٣١٩٢

أى أن التقدير مقبول

$$\overline{0} \sqrt{} - \overline{1} \sqrt{} [0] \quad \overline{1} \sqrt{} 3 - [\underline{2}] \quad \underline{2} \cdot [\underline{3}] \wedge [\underline{2}] \quad \overline{0} \sqrt{} \overline{1} [\underline{1}] (\wedge)$$

Σ. [1.] 0 √ 7 [9] 3 √ - [8] 1 - 3 √ 7 [5] 0 √ [7]

$$0 \quad [10] \quad \sqrt{2} \sqrt{\lambda} \quad [12] \quad \sqrt{3} \sqrt{\lambda} \pm [13] \quad \sqrt{3} + \sqrt{2} \sqrt{\lambda} \quad [12] \quad \sqrt{3} \quad [11]$$

الدرس الثامن : العمليات على الجذور التربيعية

$$\overline{\Gamma} \sqrt{\Gamma} = \overline{\Gamma \times \Sigma} \sqrt{\Gamma} = \overline{\Lambda} \sqrt{\Gamma} \quad [1] \quad (9)$$

$$\overline{0} \sqrt{\Gamma} = \overline{0 \times \Sigma} \sqrt{} = \overline{\Gamma} \sqrt{} \quad [\Gamma]$$

$$\sqrt{17} \times \sqrt{2} = \sqrt{17 \times 2} = \sqrt{34} \quad [3]$$

حل آخر : المقدار = (س + ص) = (٢٠ = (٥√٢) = (٢٠ = (٥√٢)

$$[٢] \text{ س} - \text{س ص} + \text{ص} = ١٤$$

$$(٦) \therefore \text{س} = \sqrt{١٣} + \sqrt{٦} , \text{س ص} = ٧$$

$$\therefore \text{ص} = \sqrt{٦} - \sqrt{١٣} , \text{س} + \text{ص} = \sqrt{١٣} \sqrt{٦}$$

$$[١] \text{ المقدار} = \sqrt{١٣} \sqrt{٦} \quad [٢] (\text{س ص}) = ٤٩$$

$$(٧) \sqrt{١٨} [٤] \quad \sqrt{٢} [٣] \quad \sqrt{٢} [٢] \quad \sqrt{٣} [١] \quad \sqrt{٥} [٥]$$

$$[٦] \sqrt{٢} \div \sqrt{٥} [٧] \quad \sqrt{٥} [٨] \quad \sqrt{٣} [٩] \quad \sqrt{٢} [١٠] \quad ١$$

$$(٨) [١] \sqrt{٢} - \sqrt{٣} \quad [٢] (\sqrt{٥} \sqrt{٢} , \sqrt{٣})$$

$$[٣] \sqrt{٢} + \sqrt{٢} - \sqrt{٥} + \sqrt{٥} = \sqrt{٢٠}$$

$$[٤] \sqrt{٢} \times \frac{1}{\sqrt{٢}} = (1 - \sqrt{٧})(1 + \sqrt{٧}) = ١ - ٧ = -٦$$

$$[٥] \sqrt{٢} + ١ = \sqrt{٢} \sqrt{٣} - \sqrt{٢} \sqrt{٢} + \sqrt{٢} \sqrt{٤} \quad [٦] \sqrt{٣} \sqrt{٢} = \sqrt{٢} \sqrt{٣}$$

$$[٧] \sqrt{٢} \sqrt{٢} + \sqrt{٢} \sqrt{٢} - \sqrt{٢} \sqrt{٤} = \sqrt{٢} \sqrt{٤} = ٢$$

الدرس التاسع : العمليات على الجذور التكعيبية

$$(١) \sqrt[٣]{٢} [١] \quad \sqrt[٣]{٢} - \sqrt[٣]{٢} [٢] \quad \sqrt[٣]{٢} [٤] \quad \sqrt[٣]{٢} [٥]$$

$$(٢) \sqrt[٣]{٢} - \sqrt[٣]{٢} = \sqrt[٣]{٢} - \sqrt[٣]{٢}$$

$$[٢] \sqrt[٣]{٢} = \sqrt[٣]{٢} + \sqrt[٣]{٣}$$

$$[٣] \sqrt[٣]{٢} = \sqrt[٣]{٣} + \sqrt[٣]{٣}$$

$$[٤] \sqrt[٣]{١٠} = \sqrt[٣]{٥} \sqrt[٣]{٢} = \sqrt[٣]{٥ \times ٢} \sqrt[٣]{٢} = \sqrt[٣]{١٠} \sqrt[٣]{٢}$$

$$[٥] \sqrt[٣]{٢} = \sqrt[٣]{٢} \times \frac{1}{\sqrt[٣]{٢}} = \sqrt[٣]{٢ \times ٣} \sqrt[٣]{\frac{1}{٢}} = \sqrt[٣]{٦} \sqrt[٣]{\frac{1}{٢}}$$

$$(٢) [١] \sqrt[٣]{٧} = \sqrt[٣]{٥} + \sqrt[٣]{٢}$$

$$[٢] \sqrt[٣]{٥} - \sqrt[٣]{٢} = \sqrt[٣]{٥} - \sqrt[٣]{٢}$$

$$[٣] \sqrt[٣]{٥} = \sqrt[٣]{٥} - \sqrt[٣]{٢}$$

$$[٤] \sqrt[٣]{٢} = \sqrt[٣]{٤} + \sqrt[٣]{٣} - \sqrt[٣]{٨} - \sqrt[٣]{٧}$$

$$(٣) [١] \text{ مرافق العدد } (\sqrt[٣]{٢} + \sqrt[٣]{٥}) \text{ هو } (\sqrt[٣]{٢} - \sqrt[٣]{٥})$$

$$\text{و مجموعهما} = \sqrt[٣]{٢} \sqrt[٣]{٥} = ٣$$

$$[٢] \text{ مرافق العدد } (\sqrt[٣]{٧} - ٣) \text{ هو } (\sqrt[٣]{٧} + ٣)$$

$$\text{و مجموعهما} = ٦ \text{ و حاصل ضربهما} = ٢$$

$$[٣] \text{ مرافق العدد } (\sqrt[٣]{٢} + \sqrt[٣]{٣}) \text{ هو } (\sqrt[٣]{٢} - \sqrt[٣]{٣})$$

$$\text{و مجموعهما} = ٤ \sqrt[٣]{٣} \text{ و حاصل ضربهما} = ٦$$

(٤) بالضرب في مرافق المقام و الاختصار ينتج :

$$[١] \sqrt[٣]{٣} - \sqrt[٣]{٧} \quad [٢] \sqrt[٣]{٤} + \sqrt[٣]{٧}$$

$$(٥) \text{ بالضرب ف المرافق ينتج : ص} = \sqrt[٣]{٣} - \sqrt[٣]{٥}$$

$$\therefore \text{س} , \text{ص} \text{ مترافقان} , \text{س} = \sqrt[٣]{١٠} \sqrt[٣]{٢} + ٨$$

$$\text{ص} = \sqrt[٣]{١٠} \sqrt[٣]{٢} - ٨ , \text{س ص} = ٢$$

$$[١] \text{س} + \sqrt[٣]{٢} \sqrt[٣]{٣} + \text{ص} = ٢٠$$

محيط الجزء المظلل = هـ ب + ب ي + $\frac{1}{4}$ محيط الدائرة

$$\therefore 20 = 20 + 20 + \frac{1}{4} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 20$$

$$\therefore 20 = \frac{22}{7} \times 20 \quad \text{و منها : } 20 = 7 \text{ سم}$$

\therefore طول ضلع المربع = 7 سم \therefore مساحة المربع = 49 سم²

$$\text{مساحة الدائرة} = \frac{22}{7} \times 20 = 140 \text{ سم}^2$$

$$(4) \text{ مساحة القاعدة} = 72 \div 2 = 144 \text{ سم}^2$$

$$\text{طول ضلع القاعدة} = \sqrt{144} = 12 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{المساحة الكلية} = (0 \times 12 + 0 \times 12 + 12 \times 12) \times 2 =$$

$$= 288 \text{ سم}^2$$

$$(5) \text{ طول حرف المكعب} = \sqrt[3]{120} = 0 \text{ سم}$$

$$\text{مساحة المكعب الكلية} = 0 \times 0 \times 6 = 10 \text{ سم}^2$$

$$(6) \text{ مساحة الوجه لبواحد للمكعب} = 294 \div 6 = 49 \text{ سم}^2$$

$$\therefore \text{طول حرف المكعب} = \sqrt{49} = 7 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{حجم المكعب} = 7 \times 7 \times 7 = 343 \text{ سم}^3$$

$$\text{حجم متوازي المستطيلات} = 7 \times 7 \times 0 = 0 \text{ سم}^3$$

\therefore حجم متوازي المستطيلات أكبر من حجم المكعب

$$(7) \text{ أبعاد الحوض هي : } 20 - 8 = 12 \text{ سم ، } 20 - 10 = 10 \text{ سم}$$

$$\text{، } 2 \text{ سم} \therefore \text{حجم الحوض} = 2 \times 10 \times 12 = 240 \text{ سم}^3$$

$$(2) \quad 0 = 2 \times 2 + 2 \times 2 - 2 \times 2 = 0$$

$$(3) \quad 0 = 2 \times 2 + 2 \times 2 - 2 \times 2 = 0$$

$$(4) \quad 0 = 2 \times 2 + 2 \times 2 - 2 \times 2 = 0$$

$$0 = 2 \times 2 + 2 \times 2 - 2 \times 2 = 0$$

$$= 2 \times 2 + 2 \times 2 - 2 \times 2 = 0$$

$$= 2 \times 2 + 2 \times 2 = 8$$

$$(5) \quad 8 = 2 \times 2 = 4 \quad (6) \quad 16 = 4 \times 4 = 16$$

الدرس العاشر : تطبيقات على الأعداد الحقيقية

$$(1) \therefore \text{محيط الدائرة} = 2\pi r \quad \therefore 2\pi r = 88 \quad \therefore \frac{22}{7} \times 2 \times r = 88$$

و منها : 14 سم

$$\therefore \text{مساحة سطح الدائرة} = \pi r^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 616 \text{ سم}^2$$

$$(2) \therefore \text{مساحة الدائرة} = \pi r^2 \quad \therefore 314 = \pi r^2 \quad \therefore r^2 = \frac{314}{\pi} = 100$$

$$\therefore r = 10 \text{ سم} \quad \therefore \text{محيط الدائرة} = 2\pi r = 2 \times 3.14 \times 10 = 62.8 \text{ سم}$$

$$(3) \text{ نفرض أن : طول نصف قطر الدائرة} = r$$

$$\therefore \text{طول ضلع المربع} = 2r$$

$$\therefore \text{حجم الأسطوانة} = \pi \times \text{نق}^2 \times \text{ع} = \frac{22}{7} \times 10 \times 49 = 1024 \text{ سم}^3$$

$$(11) \therefore \text{محيط القاعدة} = \pi \times \text{نق} = 22 \times 2 = 44$$

$$\text{و منها : نق} = 7 \text{ سم} , \therefore \text{حجم الأسطوانة} = \pi \times \text{نق}^2 \times \text{ع}$$

$$\therefore 380 = \frac{22}{7} \times 49 \times \text{ع} \quad \text{و منها : ع} = 20 \text{ سم}$$

$$(12) \therefore \text{حجم الأسطوانة} = \pi \times \text{نق}^2 \times \text{ع}$$

$$\therefore 7036 = \pi \times 14^2 \times \text{ع} \quad \text{و منها : نق} = 10 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{نق} = 10 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{المساحة الكلية للأسطوانة} = \pi \times \text{نق}^2 \times \text{ع} + \pi \times \text{نق}^2$$

$$= 3120,2 = 10 \times 3,14 \times 2 + 24 \times 10 \times 3,14 \times 2$$

$$(13) \text{حجم الأسطوانة} = \pi \times \text{نق}^2 \times \text{ع} = \frac{22}{7} \times 10 \times 7 \times 7 = 1024 \text{ سم}^3$$

$$\text{حجم المكعب} = 11 \times 11 \times 11 = 1331 \text{ سم}^3$$

$$\therefore \text{حجم الأسطوانة أكبر من حجم المكعب}$$

$$(14) \text{حجم الأسطوانة} = \pi \times \text{نق}^2 \times \text{ع} = \frac{22}{7} \times 11 \times 11 \times 1,0$$

$$= 3993 \text{ سم}^3$$

$$\therefore \text{حجم المكعب الواحد} = 3993 \div 3 = 1331 \text{ سم}^3$$

$$\therefore \text{طول حرف المكعب} = \sqrt[3]{1331} = 11 \text{ سم}$$

$$(10) \therefore \text{حجم الأسطوانة} = \pi \times \text{نق}^2 \times \text{ع} , \text{ع} = \text{نق}$$

$$\therefore \pi \times 7^2 \times \text{ع} = \pi \times \text{ع}^3 \quad \text{و منها : نق} = \text{ع} = 3 \text{ سم}$$

$$\text{المساحة الكلية} = (2 \times 17 + 2 \times 7 + 7 \times 17) \times 2 =$$

$$311 \text{ سم}^2$$

$$(8) \text{طول حرف المكعب} = \sqrt[3]{1728} = 12 \text{ سم}$$

$$\text{المساحة الكلية للمكعب} = \text{مساحة الوجه الواحد} \times 6$$

$$= (12 \times 12) \times 6 = 864 \text{ سم}^2$$

$$\text{المساحة الجانبية لمتوازي المستطيلات} = 2 \times (2 + 3) \times 2 =$$

$$= 2 \times 5 \times 2 = 20 \text{ سم}^2$$

$$\text{المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات} = 20 + 10 = (2 \times 3) \times 2 + 10$$

$$= 22 = 2 \times 2 + 10 = 22 \text{ سم}^2$$

$$\text{المساحة الكلية للجزء المتبقى} = 864 - 22 = 842 \text{ سم}^2$$

$$(9) \therefore \text{ارتفاع متوازي مستطيلات} = 3 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{مجموع الأربعة ارتفاعات} = 3 \times 4 = 12 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{مجموع أطوال أحرفه} = 02 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{مجموع باقي الأحرف الثمانية} = 02 - 12 = 40 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{القاعدة مربعة الشكل} \therefore \text{طول الحرف} = \frac{40}{8} = 5 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{الحجم} = 5 \times 5 \times 5 = 125 \text{ سم}^3$$

$$(10) \text{محيط قاعدة الأسطوانة} = 2 \times \text{ب} =$$

$$\therefore \pi \times 2 = 44 \quad \therefore \frac{22}{7} \times 2 = 44$$

$$\text{و منها : نق} = 7 \text{ سم} , \text{الارتفاع} = \text{ب} = 10 \text{ سم}$$

∴ مساحة سطح الكرة = $\pi \times ٤$ ن. = $٩ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٤ = ١١٣$ سم^٢
 ، طول حرف المكعب = $٣ \times ٢ = ٦$ سم
 ∴ حجم المكعب = $(٦)^٣ = ٢١٦$ سم^٣
 (٢٠) حجم المعدن = حجم الكرة الخارجي - حجم الكرة الداخلي

$$= \frac{٤}{٣} \pi \times ٤^٣ - \frac{٤}{٣} \pi \times ١^٣$$

$$= \frac{٤}{٣} \pi (٤^٣ - ١^٣)$$

$$= \frac{٤}{٣} \pi (٦٤ - ١) = \frac{٤}{٣} \pi \times ٦٣ = ١٤٠,٨٥٩$$
 سم^٣
 ∴ كتلة المعدن = $٢٠ \times ١٤٠,٨٥٩ = ٢٨١٧$ جراماً

(٢١) $\pi \times ٤$ [١] $١,٥$ [٢] ٢٤ [٣] $\sqrt{٢}$ [٤] ١٠ [٥] ٤ [٦]

الدرس الحادي عشر : حل المعادلات و المتباينات من الدرجة الأولى
 في متغير واحد في ح

(١) مثل بنفسك الحل على خط الأعداد :

[١] ٣ س = ٦ - ∴ س = ٢ - ∴ مجموعة الحل = $\{ ٢ - \}$

[٢] س = ٠ ∴ مجموعة الحل = $\{ ٠ \}$

[٣] س = ٤ - ∴ مجموعة الحل = $\{ ٤ - \}$

[٤] $\sqrt{٣}$ س = ٣ ∴ س = $\frac{٣}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} \times \frac{٣}{\sqrt{٣}} = \frac{٣}{\sqrt{٣}}$ ∴ مجموعة الحل = $\{ \frac{٣}{\sqrt{٣}} \}$

[٥] س = $١ + \sqrt{٢}$ ∴ مجموعة الحل = $\{ ١ + \sqrt{٢} \}$

∴ المساحة الجانبية للأسطوانة = $\pi \times ٢$ ن. ع = $٣ \times ٣ \times \pi \times ٢$
 $= \pi \times ١٨$ سم^٢

(١٦) كرة مساحة سطحها ١٢٥٦ سم^٢ أوجد حجمها ($\pi = ٣,١٤$)

∴ مساحة سطح الكرة = $\pi \times ٤$ ن.

∴ $١٢٥٦ = ٣,١٤ \times ٤$ ن. ومنها : ن. = ١٠ سم

∴ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \pi \times ١٠^٣ = ٤١٨٧$ سم^٣

(١٧) طول نصف قطر الكرة = ٣ سم

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \pi \times ٣^٣ = ٣٦ \pi$ سم^٣

، ∴ حجم الأسطوانة = حجم الكرة

∴ $\pi \times ٣٦ = ٩ \times \pi$ ∴ $\pi \times ٣٦ = ٩ \times \pi$

و منها : ع = ٤ سم

(١٨) حجم متوازي المستطيلات = $٧٧ \times ٢٤ \times ٢١ = ٣٨٨٠٨$ سم^٣

، ∴ حجم الكرة = حجم متوازي المستطيلات

∴ $\frac{٤}{٣} \pi \times ٣^٣ = ٣٨٨٠٨$ ∴ $\frac{٤}{٣} \pi \times ٣^٣ = ٣٨٨٠٨$

∴ ن. = $\frac{٢١}{٨٨} \times ٣٨٨٠٨ = ٩٢٦١$ و منها : ن. = ٢١ سم

(١٩) ∴ الكرة تماس أوجه المكعب الستة ∴ طول حرف المكعب = ٢ ن.

، ∴ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \pi \times ٣^٣ = ٣٦ \pi$ ∴ $\frac{٤}{٣} \pi \times ٣^٣ = ٣٦ \pi$

∴ ن. = $٣٦ = \frac{٣}{٤} \times ٢٧$ ∴ ن. = ٣ سم

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = [3 + p, 3 + b]$$

$$\therefore [3 + p, 3 + b] = [v, e]$$

$$\therefore 3 + p = e, \text{ و منها : } p = 1$$

$$3 + b = v, \text{ و منها : } b = e$$

$$(٤) \{0\} [1] \{2\} \{3\} \{4\} \{5\} \{6\} \{7\} \{8\} \{9\} \{10\} \{11\} \{12\} \{13\} \{14\} \{15\} \{16\} \{17\} \{18\} \{19\} \{20\} \{21\} \{22\} \{23\} \{24\} \{25\} \{26\} \{27\} \{28\} \{29\} \{30\} \{31\} \{32\} \{33\} \{34\} \{35\} \{36\} \{37\} \{38\} \{39\} \{40\} \{41\} \{42\} \{43\} \{44\} \{45\} \{46\} \{47\} \{48\} \{49\} \{50\} \{51\} \{52\} \{53\} \{54\} \{55\} \{56\} \{57\} \{58\} \{59\} \{60\} \{61\} \{62\} \{63\} \{64\} \{65\} \{66\} \{67\} \{68\} \{69\} \{70\} \{71\} \{72\} \{73\} \{74\} \{75\} \{76\} \{77\} \{78\} \{79\} \{80\} \{81\} \{82\} \{83\} \{84\} \{85\} \{86\} \{87\} \{88\} \{89\} \{90\} \{91\} \{92\} \{93\} \{94\} \{95\} \{96\} \{97\} \{98\} \{99\} \{100\}$$

$$[0, v] \cup [e, 100]$$

$$[8] - s \geq 2 \quad [9] - s \leq 2$$

$$(٥) [1] 36 [2] 8 [3] 2 [4] 1 [5] 1 [6] 9 [7] 3, \infty - [8] 1, \infty - [9] 3, \infty - [10] 3, \infty - [11] 3, \infty - [12] 3, \infty - [13] 3, \infty - [14] 3, \infty - [15] 3, \infty - [16] 3, \infty - [17] 3, \infty - [18] 3, \infty - [19] 3, \infty - [20] 3, \infty - [21] 3, \infty - [22] 3, \infty - [23] 3, \infty - [24] 3, \infty - [25] 3, \infty - [26] 3, \infty - [27] 3, \infty - [28] 3, \infty - [29] 3, \infty - [30] 3, \infty - [31] 3, \infty - [32] 3, \infty - [33] 3, \infty - [34] 3, \infty - [35] 3, \infty - [36] 3, \infty - [37] 3, \infty - [38] 3, \infty - [39] 3, \infty - [40] 3, \infty - [41] 3, \infty - [42] 3, \infty - [43] 3, \infty - [44] 3, \infty - [45] 3, \infty - [46] 3, \infty - [47] 3, \infty - [48] 3, \infty - [49] 3, \infty - [50] 3, \infty - [51] 3, \infty - [52] 3, \infty - [53] 3, \infty - [54] 3, \infty - [55] 3, \infty - [56] 3, \infty - [57] 3, \infty - [58] 3, \infty - [59] 3, \infty - [60] 3, \infty - [61] 3, \infty - [62] 3, \infty - [63] 3, \infty - [64] 3, \infty - [65] 3, \infty - [66] 3, \infty - [67] 3, \infty - [68] 3, \infty - [69] 3, \infty - [70] 3, \infty - [71] 3, \infty - [72] 3, \infty - [73] 3, \infty - [74] 3, \infty - [75] 3, \infty - [76] 3, \infty - [77] 3, \infty - [78] 3, \infty - [79] 3, \infty - [80] 3, \infty - [81] 3, \infty - [82] 3, \infty - [83] 3, \infty - [84] 3, \infty - [85] 3, \infty - [86] 3, \infty - [87] 3, \infty - [88] 3, \infty - [89] 3, \infty - [90] 3, \infty - [91] 3, \infty - [92] 3, \infty - [93] 3, \infty - [94] 3, \infty - [95] 3, \infty - [96] 3, \infty - [97] 3, \infty - [98] 3, \infty - [99] 3, \infty - [100] 3, \infty -$$

$$[8] 1, \infty - [9] 3, \infty - [10] 3, \infty - [11] 3, \infty - [12] 3, \infty - [13] 3, \infty - [14] 3, \infty - [15] 3, \infty - [16] 3, \infty - [17] 3, \infty - [18] 3, \infty - [19] 3, \infty - [20] 3, \infty - [21] 3, \infty - [22] 3, \infty - [23] 3, \infty - [24] 3, \infty - [25] 3, \infty - [26] 3, \infty - [27] 3, \infty - [28] 3, \infty - [29] 3, \infty - [30] 3, \infty - [31] 3, \infty - [32] 3, \infty - [33] 3, \infty - [34] 3, \infty - [35] 3, \infty - [36] 3, \infty - [37] 3, \infty - [38] 3, \infty - [39] 3, \infty - [40] 3, \infty - [41] 3, \infty - [42] 3, \infty - [43] 3, \infty - [44] 3, \infty - [45] 3, \infty - [46] 3, \infty - [47] 3, \infty - [48] 3, \infty - [49] 3, \infty - [50] 3, \infty - [51] 3, \infty - [52] 3, \infty - [53] 3, \infty - [54] 3, \infty - [55] 3, \infty - [56] 3, \infty - [57] 3, \infty - [58] 3, \infty - [59] 3, \infty - [60] 3, \infty - [61] 3, \infty - [62] 3, \infty - [63] 3, \infty - [64] 3, \infty - [65] 3, \infty - [66] 3, \infty - [67] 3, \infty - [68] 3, \infty - [69] 3, \infty - [70] 3, \infty - [71] 3, \infty - [72] 3, \infty - [73] 3, \infty - [74] 3, \infty - [75] 3, \infty - [76] 3, \infty - [77] 3, \infty - [78] 3, \infty - [79] 3, \infty - [80] 3, \infty - [81] 3, \infty - [82] 3, \infty - [83] 3, \infty - [84] 3, \infty - [85] 3, \infty - [86] 3, \infty - [87] 3, \infty - [88] 3, \infty - [89] 3, \infty - [90] 3, \infty - [91] 3, \infty - [92] 3, \infty - [93] 3, \infty - [94] 3, \infty - [95] 3, \infty - [96] 3, \infty - [97] 3, \infty - [98] 3, \infty - [99] 3, \infty - [100] 3, \infty -$$

الوحدة الثانية

العلاقة بين متغيرين

الدرس الأول : العلاقة بين متغيرين

(١) نفرض أن : عدد الأوراق فئة ٥ جنيهاً هو س

∴ قيمتها = ٥ س جنيهاً

و عدد الأوراق فئة ٢٠ جنيهاً هو : ص ∴ قيمتها = ٢٠ ص جنيهاً

$$\therefore ٥ س + ٢٠ ص = ٨٥ \quad \text{بالقسمة على ٥}$$

$$\therefore س + ٤ ص = ١٧ \quad \therefore س = ١٧ - ٤ ص$$

و تكون الإمكانات المختلفة هي :

| | | | | |
|---|----|---|---|---|
| س | ١٣ | ٩ | ٥ | ١ |
| ص | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |

$$[٦] \quad \sqrt{v} = s \quad \therefore \sqrt{v} = s$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{ \sqrt{v} \}$$

(٢) مثل بنفسك الحل على خط الأعداد

$$[١] \quad ٣ < ٣ \quad \therefore ١ < ٣ \quad \therefore \text{مجموعة الحل} = [١, \infty]$$

$$[٢] \quad ٤ - ٣ \leq ٨ - ٣ \quad \therefore ١ \leq ٥ \quad \therefore \text{مجموعة الحل} = [١, \infty]$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = [٢, \infty]$$

$$[٣] \quad ٢ - ٢ > ٢ - ٣ \quad \therefore ٠ > -١ \quad \therefore \text{مجموعة الحل} = [٣, \infty]$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = [٣, \infty]$$

$$[٤] \quad \frac{1}{٢} \geq ١ \quad \therefore ١ \geq ٢ \quad \therefore \text{مجموعة الحل} = [٢, \infty]$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = [٢, \infty]$$

$$[٥] \quad ٢ - ٢ \geq ٢ - ٥ \quad \therefore ٠ \geq -٣ \quad \therefore \text{مجموعة الحل} = [٢, \infty]$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = [٢, \infty]$$

$$[٦] \quad ١ - ٢ \geq ٣ - ٥ \quad \therefore -١ \geq -٢ \quad \therefore \text{مجموعة الحل} = [٤, ١]$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = [٤, ١]$$

$$[٧] \quad ٢ > ٣ - ١ \quad \therefore ٢ > ٢ \quad \therefore \text{مجموعة الحل} = [٣, ١]$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = [٣, ١]$$

$$[٨] \quad ٢ - ٢ > ٣ - ١ \quad \therefore ٠ > ٢ \quad \therefore \text{مجموعة الحل} = [١, ٣]$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = [١, ٣]$$

$$(٣) \quad ٣ + ب \geq ٣ + پ \quad \therefore ب \geq پ$$

(٢) نفرض أن : طول أى من الضلعين المتساويين في المثلث = س سم

، طول الضلع الثالث = ص سم

∴ محيط المثلث = ١٩ سم

∴ ص = ١٩ - ٢س ، ∴ س ، ص ⊆ ص

∴ س لا يمكن أن تزيد عن ٩

، ∴ مجموع طولى أى ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالث

∴ س تأخذ القيم : ٩ ، ٨ ، ٧ ، ٦ ، ٥

، ص تأخذ القيم : ٩ ، ٧ ، ٥ ، ٣ ، ١

أى أن : الإمكانيات المختلفة هي :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| س | ٩ | ٨ | ٧ | ٦ | ٥ |
| ص | ١ | ٣ | ٥ | ٧ | ٩ |

(٣) [١] س + ٥ = ٢ص

بوضع ص = .

∴ س = . × ٢ + ٥ = ٥

∴ (. ، ٥) يحقق العلاقة

بوضع ص = ١

∴ س = ١ × ٢ + ٥ = ٧

∴ (١ ، ٧) يحقق العلاقة

بوضع ص = ٢

∴ س = ٢ × ٢ + ٥ = ٩

∴ (٢ ، ٩) يحقق العلاقة

[٢] س + ١٠ = ٥ ص

بوضع ص = .

∴ س = . × ٥ - ١٠ = ١٠

∴ (. ، ٥) يحقق العلاقة

∴ س = ٥

بوضع ص = ٢ ∴ س = ٢ × ٥ - ١٠ = .

∴ س = . ∴ (٢ ، .) يحقق العلاقة

بوضع ص = ٢ - ∴ س = ٢ × ٥ - ١٠ = ٢٠

∴ س = ١٠ ∴ (٢ - ، ١٠) يحقق العلاقة

(٤) [١] نضع : س = ٥ ، ص = ٣

∴ س - ص = ٢ - ٣ = ١ - ٣ = ٣ - ٥ × ٢ = ٧ ≠ ١

∴ (٣ ، ٥) لا يحقق العلاقة

[٢] نضع : س = ٣ ، ص = ٥

∴ س - ص = ٢ - ٥ = ٣ - ٥ × ٢ = ١

∴ (٥ ، ٣) يحقق العلاقة

[٣] نضع : س = ٢ - ، ص = ٥ -

∴ س - ص = ٢ - (٥ -) = (٢ -) - (٥ -) × ٢ = ١

∴ (٥ - ، ٢ -) يحقق العلاقة

(٥) [١] ٧ [٢] ١١ - [٣] ٢ [٤] (٣ ، ١)

[٥] (٣ ، ٢) [٦] ص = ٣ س + ١

(٦) ٢ س - ص = ٣

بوضع ص = . ∴ س = ٣ - . × ٢

∴ ص = ٣ - ∴ (٣ - ، .) يحقق العلاقة

بوضع ص = ١ ∴ س = ١ - ٣ × ٢ = ٣

∴ ص = ١ - ∴ (١ - ، ١) يحقق العلاقة

بوضع ص = ٢ ∴ س = ٢ - ٢ × ٢ = ٣

الدرس الثاني : ميل الخط المستقيم و تطبيقات حياتية

$$(1) \quad \frac{1}{3} = \frac{1-2}{1-2} = 2 \quad [1] \quad \frac{0}{3-1} = 0 \quad [2]$$

$$[3] \quad 1 - = \frac{2-0}{2+0} = 2 \quad [4] \quad 1 = \frac{3+2-}{1+2-}$$

$$(2) \quad 0 = \frac{1-1}{1+1} \quad 0 = \frac{0}{1+1} \quad \therefore 0 = \frac{0}{1+1}$$

$$0 = 0 + 1 \quad 0 = 0 + 1 \quad \therefore 0 = 0 + 1$$

$$(3) \quad \frac{3}{6} = \frac{ص}{1+1} \quad \therefore \frac{3}{6} = \frac{ص}{2} \quad \text{و منها : } ص = 3$$

$$(4) \quad \text{المستقيم يمر بالنقطتين } (1, 3), (2, 0) \quad \therefore \frac{3}{6} = \frac{1+1}{3-1} = 2$$

$$\therefore \frac{3}{6} = \frac{1+1}{3-1} = 2 \quad \therefore \frac{3}{6} = \frac{1+1}{3-1} = 2$$

$$\therefore 3 = 3 - 1 \quad \text{منها : } 1 = 3 - 1$$

$$\therefore \text{المستقيم يمر بالنقطتين } (1, 3), (2, 0) \quad \therefore \frac{3}{6} = \frac{1+1}{3-1} = 2$$

$$\therefore \frac{3}{6} = \frac{1+1}{3-1} = 2 \quad \therefore \frac{3}{6} = \frac{1+1}{3-1} = 2$$

$$\therefore 3 = 3 + 1 \quad \text{منها : } 3 = 3 + 1$$

$$(5) \quad \text{ميل } \vec{AB} = \frac{1+2}{1-3} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2} \quad \text{ميل } \vec{BC} = \frac{2-0}{3-2} = 2$$

$$\therefore \frac{3}{6} = \frac{1+0}{2-2} = \text{غير معرف}$$

نلاحظ أن : النقط A, B, C ليست على استقامة واحدة

$$(6) \quad \therefore \text{المستقيم يوازي محور السينات} \quad \therefore \text{ميله} = 0$$

$$\therefore \frac{2-0}{2-3} = -2 \quad \therefore \text{منها : } 2 = -2$$

$$(7) \quad \text{ميل المستقيم المار بالنقطتين } (1, 2), (2, 1) \quad \therefore \frac{2-1}{1-2} = -1$$

$$\therefore \text{ميل المستقيم المار بالنقطتين } (3, 3), (7, -2) \quad \therefore \frac{3-(-2)}{3-7} = -\frac{5}{4}$$

أحمد الشنتوي

$$\therefore ص = 1 \quad \therefore (1, 2) \text{ يحقق العلاقة}$$

كون الجدول و أرسم المستقيم بنفسك

$$(8) \quad \text{بوضع : } ص = 2 \quad \text{ينتج : } 2 = 2$$

$$\therefore \text{نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي } (2, 0)$$

$$\text{بوضع : } ص = 4 \quad \text{ينتج : } 4 = 4$$

$$\therefore \text{نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي } (0, 4)$$

أرسم المستقيم بنفسك

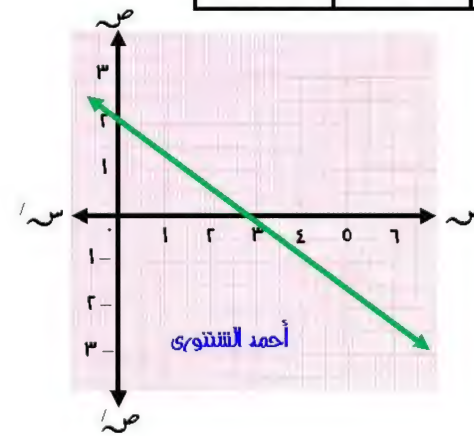
$$(9) \quad \therefore \text{المستقيم يقطع محور السينات في النقطة } (3, 0)$$

$$\therefore 2 = 3 \times 2 - 3 = 3 \quad \text{تحقق العلاقة : } 2 = 3 - 3$$

$$\therefore 2 = 3 \times 2 - 3 = 3 \quad \text{و منها : } 2 = 3$$

$$(10) \quad 2 = 3 + 3 = 6$$

| | | | |
|---|---|---|----|
| ص | 3 | 0 | 1 |
| ص | 0 | 2 | 2- |



من الرسم :

$$\text{مساحة } \triangle \text{ و } P = 3$$

$$= 3 \times 2 \times \frac{1}{2}$$

3 وحدة مربعة

أحمد الشنتوي

[٢] السرعة المنتظمة للسيارة خلال رحلة الذهاب = ميل \vec{p} ب

$$20 \text{ كم / س} = \frac{0 - 70}{0 - 3} =$$

[٣] المسافة الكلية خلال رحلة العودة = ٦٠ كم

[٤] الزمن الكلي خلال رحلة العودة = ٥ ساعة

[٥] سرعة المتوسطة للسيارة خلال رحلة العودة = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلي}}$

$$12 \text{ كم / س} = \frac{70}{6} =$$

[٦] القطعة المستقيمة الأفقية بالشكل تدل على توقف السيارة خلال

الساعة السادسة من بدء الحركة

[٣] (١) أكبر سعة للخران = ٧٠ لتر

[٢] يفرغ الخزان بعد مرور ٣٠ ساعة

[٣] بعد مرور ١٥ ساعة يتبقى بالخران ٣٥ لتر

[٤] يتبقى بالخران ١٠ لتر بعد مرور ٢٥ ساعة

[٥] $\vec{p} = (0, 70)$ ، $\vec{b} = (30, 0)$

$$\text{ميل } \vec{p} \text{ ب} = \frac{0 - 70}{30 - 0} = -\frac{7}{3}$$

[٧] معدل استهلاك الوقود في الساعة الواحدة = $-\frac{7}{3}$ لتر / ساعة

[٤] (١) عدد صفحات الكتاب المتبقية عن بداية القراءة = ١٠٠ صفحة

[٢] $\vec{p} = (100, 0)$ ، $\vec{b} = (40, 3)$

$$\text{ميل } \vec{p} \text{ ب} = \frac{100 - 40}{0 - 3} = -\frac{60}{3} = -20$$

[٤] معدل الصفحات المقرؤة في الساعة الواحدة = -20 صفحة / ساعة

و يعنى أن عدد الصفحات ينقص بمعدل ٢٠ صفحة / ساعة

∴ ميلا المستقيمان متساويان $\frac{2}{1} = \frac{7+3}{0+3} =$

$$\text{ميل } \vec{p} \text{ ب} = \frac{3-0}{1+2} = \frac{3}{3} = 1 \quad \therefore \text{ميل } \vec{b} \text{ ح} = \frac{0-1}{2-8} = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$$

∴ $\vec{p} \neq \vec{b}$

(٩) [١] سالب [٢] صفر [٣] غير معرف [٤] موجب

تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم :

(١) [١] $\vec{p} = (20, 0)$ ، $\vec{b} = (70, 4)$

$\vec{c} = (70, 7)$ ، $\vec{e} = (0, 8)$

$$\text{ميل } \vec{p} \text{ ب} = \frac{0 - 70}{20 - 4} = -\frac{70}{16} = -\frac{35}{8}$$

و هو يعبر عن تزايد رأس مال الشركة بمعدل ١٠ آلاف جنيه

خلال السنوات الأربعة الأولى

$$\text{ميل } \vec{b} \text{ ح} = \frac{100 - 40}{0 - 3} = -\frac{60}{3} = -20 \text{ صفر}$$

و هو يعبر عن ثبات رأس مال الشركة خلال السنتين الخامسة والسادسة

$$\text{ميل } \vec{c} \text{ ع} = \frac{70 - 0}{7 - 8} = -\frac{70}{1} = -70$$

و هو يعبر عن تناقص رأس مال الشركة بمعدل ٥ آلاف جنيه

خلال السنتين الأخيرتين

[٥] رأس مال الشركة عند بدء العمل = الإحداثى الصادى عند

= ألف جنيه

(٢) [١] $\vec{p} = (70, 3)$ ، $\vec{b} = (30, 0)$ ،

$\vec{c} = (30, 7)$ ، $\vec{e} = (0, 8)$

∴ الزمن اللازم لقراءة بقية الصفحات = ٦. دقيقة

الوحدة الثالثة الإحصاء

الدرس الأول : جمع البيانات و تنظيمها

(١) أكبر قيمة = ٤٤ (٢) أصغر قيمة = ١٥

(٣) المدى = ٤٤ - ١٥ = ٢٩

(٤) المدى = $\frac{29}{6} \approx ٦$ مجموعة (٢) كون بنفسك

| المجموعات | - ١٥ | - ٢٠ | - ٢٥ | - ٣٠ | - ٣٥ | - ٤٠ | المجموع |
|-----------|------|------|------|------|------|------|---------|
| التكرار | ٢ | ٥ | ١١ | ١٢ | ٦ | ٤ | ٤٠ |

(٤) عدد الأطفال الذين تقل أوزانهم عن ٢٥ كجم = ٧ أطفال

(٥) عدد الأطفال الذين أوزانهم ٢٥ كجم فأكثر = ٣٣ طفل

(٢) أكبر قيمة = ٥٠ (٢) أصغر قيمة = ٢٠

(٣) المدى = ٥٠ - ٢٠ = ٣٠

| المجموعات | - ٢٠ | - ٢٥ | - ٣٠ | - ٣٥ | - ٤٠ | - ٤٥ | المجموع |
|-----------|------|------|------|------|------|------|---------|
| التكرار | ٤ | ٣ | ٥ | ٧ | ٦ | ٥ | ٣٠ |

| المجموعات | - ٣٠ | - ٤٠ | - ٥٠ | - ٦٠ | - ٧٠ | - ٨٠ | - ٩٠ | المجموع |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|---------|
| التكرار | ٤ | ٥ | ٧ | ٨ | ٦ | ٤ | ٦ | ٤٠ |

المجموعة التي بها أكبر تكرار هي : - ٦٠ -

المجموعة التي بها أقل تكرار هي : - ٢٠ ، - ٨٠ -

[٥] انتهى سهير قراءة الكتاب بعد : $\frac{1}{4}$ = ٥ ساعات

(٥) [١] = ٥ (٠ ، ٠) = ب ، (٢٧,٥ ، ٤,٥) =

ح = (٢٧,٥ ، ٨) = ع ، (٤٠ ، ١٠) =

[٢] عمق البئر قبل بدء عمل الحفار = ٥ متر

[٣] عمق البئر بعد انتهاء عمل الحفار = ٤٠ متر

[٣] الزمن الكلي الذي أستغرقه الحفار في الحفر = ١٠ ساعات

[٤] ميل $\overrightarrow{AB} = \frac{0 - 27,5}{5 - 0} = ٤,٥$

[٥] متوسط العمق الذي يحفره الحفار في الخمس ساعات الأولى

= ٤,٥ متر / ساعة

[٦] ميل $\overrightarrow{AC} = \frac{27,5 - 4}{8 - 1} = ٦,٢٥$

[٧] متوسط العمق الذي يحفره الحفار في الساعتين الأخيرتين

= ٦,٢٥ متر / ساعة

(٦) [١] عدد الصفحات عند : ن = .

هي : ص = $\frac{1}{4} \times . - ٣٠ = ٣٠$

∴ عدد الصفحات المتبقية = ٣٠ صفحة

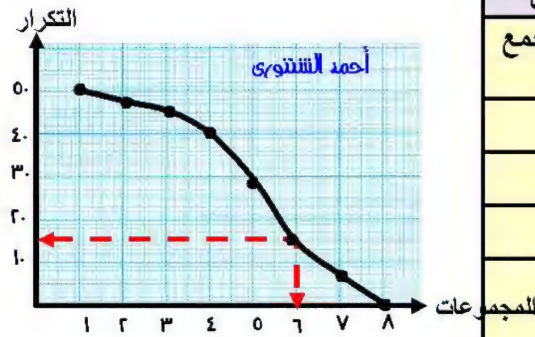
∴ عدد الصفحات التي سبق لهذا الشخص قراءتها =

٦٠ - ٣٠ = ٣٠ صفحة

[٢] الزمن اللازم لقراءة بقية الصفحات التي يكون عندها عدد

الصفحات = . أي عند : ص = .

∴ $٣٠ - \frac{1}{4} \times . = .$ ومنها : ن = ٦٠ دقيقة



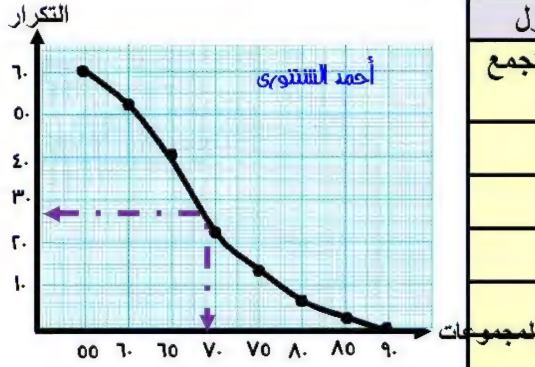
[١] تلميذ ١٣

$$[٢] \frac{13}{50} \times 100 = 26\%$$

| الحدود السفلى للمجموعات | الحدود العليا للمجموعات |
|-------------------------|-------------------------|
| ١ فأكثر | ٥٠ |
| ٢ فأكثر | ٤٨ |
| ٣ فأكثر | ٤٥ |
| ٤ فأكثر | ٤٠ |
| ٥ فأكثر | ٢٨ |
| ٦ فأكثر | ١٣ |
| ٧ فأكثر | ٦ |
| ٨ فأكثر | ٠ |

(٣)

أحمد الشنتوي



[١] ١٠

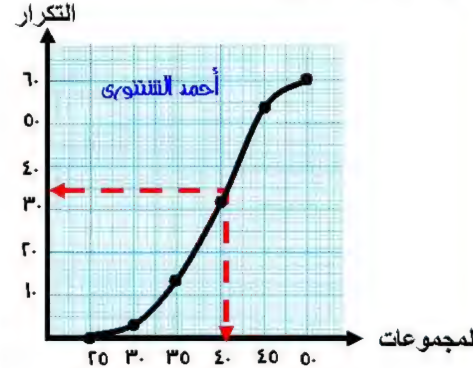
[٢] ٢٨ شخصاً

| الحدود السفلى للمجموعات | الحدود العليا للمجموعات |
|-------------------------|-------------------------|
| ٥٥ فأكثر | ٦٠ |
| ٦٠ فأكثر | ٥٢ |
| ٦٥ فأكثر | ٤٠ |
| ٧٠ فأكثر | ٢٢ |
| ٧٥ فأكثر | ١٢ |
| ٨٠ فأكثر | ٥ |
| ٨٥ فأكثر | ٢ |
| ٩٠ فأكثر | ٠ |

(٤)

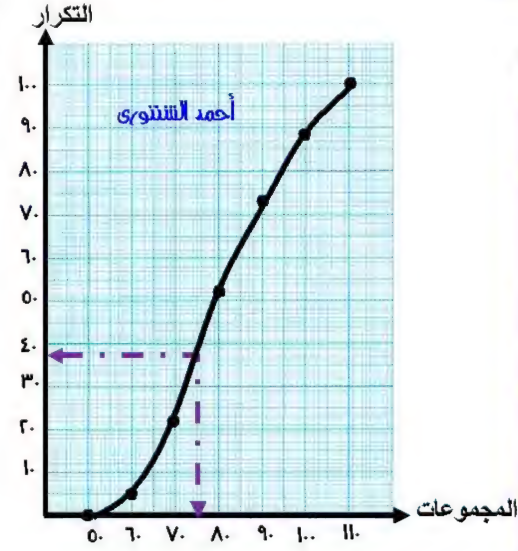
الدرس الثاني : الجدول التكراري المتجمع الصاعد
و الجدول التكراري المتجمع النازل و تمثيلهما بيانياً

[١] ٣٦ عامل



| الحدود العليا للمجموعات | الحدود السفلى للمجموعات |
|-------------------------|-------------------------|
| أقل من ٢٥ | ٠ |
| أقل من ٣٠ | ٣ |
| أقل من ٣٥ | ١٣ |
| أقل من ٤٠ | ٣٢ |
| أقل من ٤٥ | ٥٥ |
| أقل من ٥٠ | ٦٠ |

(١)

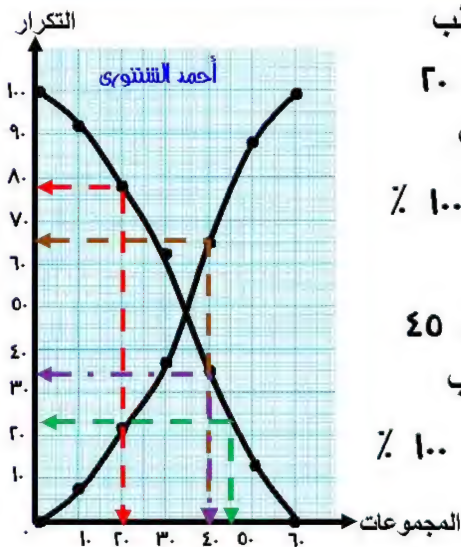
[١] ٣٧ مصنع $[٢] \frac{37}{100} \times 100 = 37\%$

(٢)

| الحدود العليا للمجموعات | الحدود السفلى للمجموعات |
|-------------------------|-------------------------|
| أقل من ٥٠ | ٠ |
| أقل من ٦٠ | ٥ |
| أقل من ٧٠ | ٢١ |
| أقل من ٨٠ | ٥١ |
| أقل من ٩٠ | ٧٢ |
| أقل من ١٠٠ | ٨٨ |
| أقل من ١١٠ | ١٠٠ |

| جدول التكرار المتجمع الصاعد | | جدول التكرار المتجمع النازل | |
|-----------------------------|------------------------|-----------------------------|------------------------|
| الحدود العليا للمجموعات | التكرار المتجمع الصاعد | الحدود السفلى للمجموعات | التكرار المتجمع النازل |
| أقل من ٠ | ٠ | ٠ | ١٠٠ |
| أقل من ١٠ | ٨ | ١٠ فأكثر | ٩٢ |
| أقل من ٢٠ | ٢٢ | ٢٠ فأكثر | ٧٨ |
| أقل من ٣٠ | ٣٧ | ٣٠ فأكثر | ٦٣ |
| أقل من ٤٠ | ٦٥ | ٤٠ فأكثر | ٣٥ |
| أقل من ٥٠ | ٨٨ | ٥٠ فأكثر | ١٢ |
| أقل من ٦٠ | ١٠٠ | ٦٠ فأكثر | ٠ |

(٦)



[١] ٦٥ طالب [٢] ٣٥ طالب

[٣] عدد الطلبة الحاصلين على ٢٠

درجة فأكثر = ٧٨ طالب

$$\text{النسبة المئوية} = \frac{٧٨}{١٠٠} \times ١٠٠\%$$

$$= ٧٨\%$$

[٤] عدد الطلبة الحاصلين على ٤٥

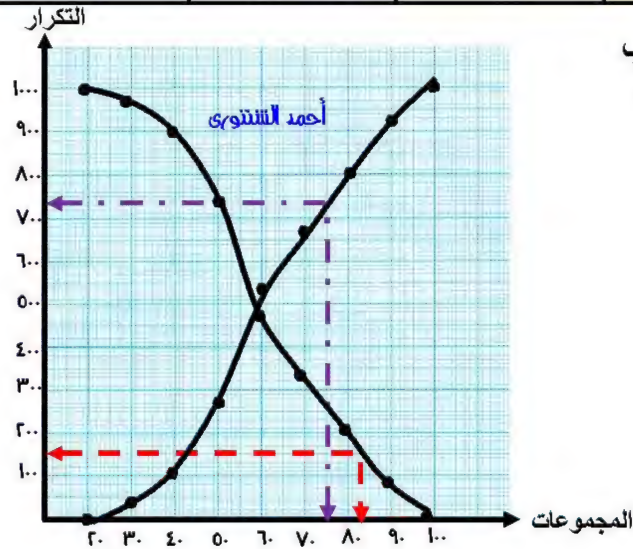
درجة فأكثر = ٢٣ طالب

$$\text{النسبة المئوية} = \frac{٢٣}{١٠٠} \times ١٠٠\%$$

$$= ٢٣\%$$

| جدول التكرار المتجمع الصاعد | | جدول التكرار المتجمع النازل | |
|-----------------------------|------------------------|-----------------------------|------------------------|
| الحدود العليا للمجموعات | التكرار المتجمع الصاعد | الحدود السفلى للمجموعات | التكرار المتجمع النازل |
| أقل من ٢٠ | ٠ | ٢٠ فأكثر | ١٠٠ |
| أقل من ٣٠ | ٣ | ٣٠ فأكثر | ٩٧ |
| أقل من ٤٠ | ١٠ | ٤٠ فأكثر | ٩٠ |
| أقل من ٥٠ | ٢٦ | ٥٠ فأكثر | ٧٤ |
| أقل من ٦٠ | ٥٢ | ٦٠ فأكثر | ٤٨ |
| أقل من ٧٠ | ٦٧ | ٧٠ فأكثر | ٣٣ |
| أقل من ٨٠ | ٨٠ | ٨٠ فأكثر | ٢٠ |
| أقل من ٩٠ | ٩١ | ٩٠ فأكثر | ٩ |
| أقل من ١٠٠ | ١٠٠ | ١٠٠ فأكثر | ٠ |

(٥)



[١] ٧٤ طالب

[٢] ١٤ طالب

الدرس الثالث : الوسط الحسابي - الوسيط - المنوال

(١) (١) ١٠ (٢) ٥ (٣) ٧ (٤) ٤ (٥) ٧ (٦) ٦

(٢)

الوسط الحسابي

$$\frac{3090}{100} =$$

$$30,9 =$$

| المجموعة | مركز المجموعة (٢) | التكرار (١) | ك × ٢ |
|----------|-------------------|-------------|-------|
| - ٥ | ١٠ | ١٠ | ١٠٠ |
| - ١٥ | ٢٠ | ٢٢ | ٤٤٠ |
| - ٢٥ | ٣٠ | ٣٠ | ٩٠٠ |
| - ٣٥ | ٤٠ | ٢٥ | ١٠٠٠ |
| - ٤٥ | ٥٠ | ١٣ | ٦٥٠ |
| المجموع | | ١٠٠ | ٣٠٩٠ |

$$٥٠ = ٨ + ١٣ + ١ + ١٠ + ٧ + ٣٥$$

و منها : ك = ١١

(٢)

| المجموعة | مركز المجموعة (٢) | التكرار (١) | ك × ٢ |
|----------|-------------------|-------------|-------|
| - ٥ | ١٠ | ٧ | ٧٠ |
| - ١٥ | ٢٠ | ١٠ | ٢٠٠ |
| - ٢٥ | ٣٠ | ١١ | ٣٣٠ |
| - ٣٥ | ٤٠ | ١٣ | ٥٢٠ |
| - ٤٥ | ٥٠ | ٨ | ٤٠٠ |
| المجموع | | ٥٠ | ١٥٢٠ |

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{1520}{50} = 30,4$$

(٤) (١) ٥ (٢) ٦

أحمد الشنتوي

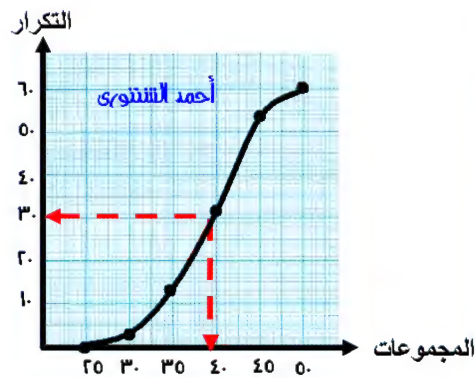
(٣)

| المجموعة | مركز المجموعة (٢) | التكرار (١) | ك × ٢ |
|----------|-------------------|-------------|-------|
| - ٦ | ٨ | ٢ | ١٦ |
| - ١٠ | ١٢ | ٣ | ٣٦ |
| - ١٤ | ١٦ | ٥ | ٨٠ |
| - ١٨ | ٢٠ | ٨ | ١٦٠ |
| - ٢٢ | ٢٤ | ٦ | ١٤٤ |
| - ٢٦ | ٢٨ | ٤ | ١١٢ |
| - ٣٠ | ٣٢ | ٢ | ٦٤ |
| المجموع | | ٣٠ | ٦١٢ |

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{612}{30} = 20,4$$

(٥) (١) ٥ (٢) ٦ (٣) الثالث (٤) ٩

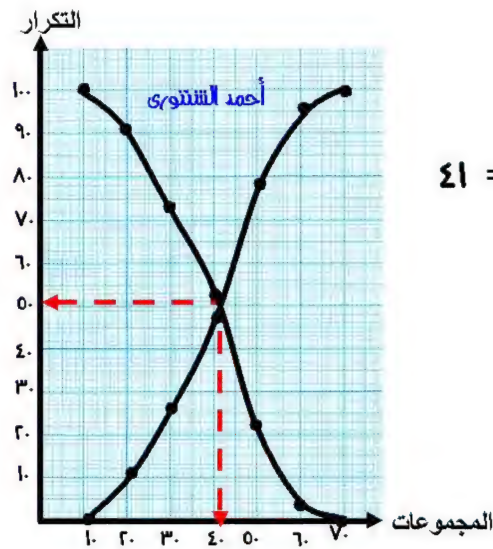
(٦)



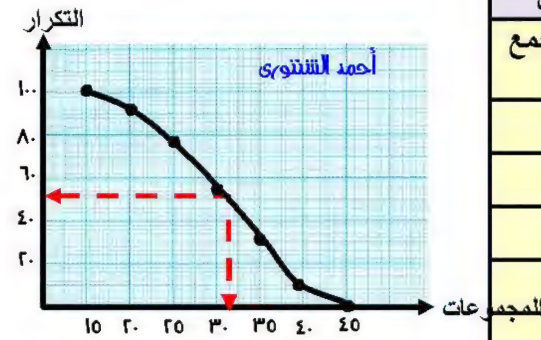
$$\therefore \text{ترتيب الوسيط} = \frac{30}{2} = 15$$

$$\therefore \text{من الرسم : الوسيط} = 39$$

أحمد الشنتوي



من الرسم : الوسيط = ٤



ترتيب الوسيط = ٥

من الرسم : الوسيط = ٣

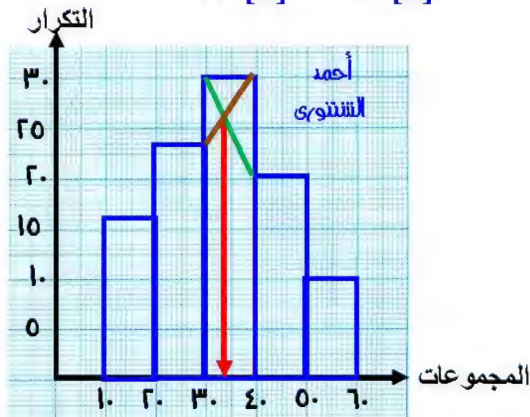
(٧)

| الحدود السفلى للمجموعات | التكرار المتجمع النازل |
|-------------------------|------------------------|
| ١٥ فأكثر | ١٠ |
| ٢٠ فأكثر | ٩ |
| ٢٥ فأكثر | ٧ |
| ٣٠ فأكثر | ٥ |
| ٣٥ فأكثر | ٣ |
| ٤٠ فأكثر | ١ |

(٨) [١] س = ٣ ، ل = ١٥

[٢]

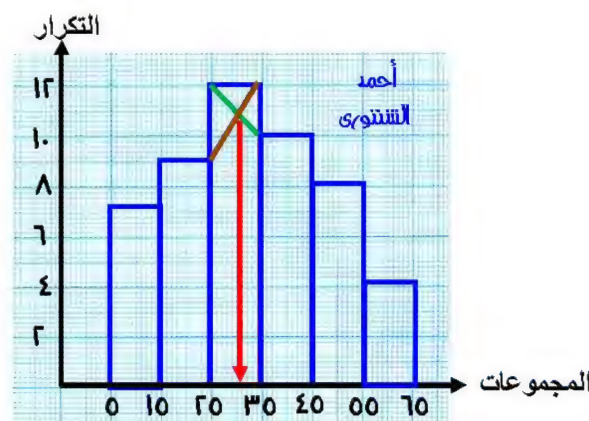
| الحدود العليا للمجموعات | التكرار المتجمع الصاعد | الحدود السفلى للمجموعات | التكرار المتجمع النازل |
|-------------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|
| أقل من ١٠ | ٠ | ١٥ فأكثر | ١٠ |
| أقل من ٢٠ | ١ | ٢٠ فأكثر | ٩ |
| أقل من ٣٠ | ٢ | ٢٥ فأكثر | ٧ |
| أقل من ٤٠ | ٤ | ٣٠ فأكثر | ٥ |
| أقل من ٥٠ | ٧ | ٣٥ فأكثر | ٣ |
| أقل من ٦٠ | ٩ | ٤٠ فأكثر | ١ |
| أقل من ٧٠ | ١٠ | ٤٥ فأكثر | ٠ |



(٩) [١] ٩ [٢] ٤ [٣] ٣ [٤] ٧ [٥] ٨
من الرسم :
المعدل = ٣٤

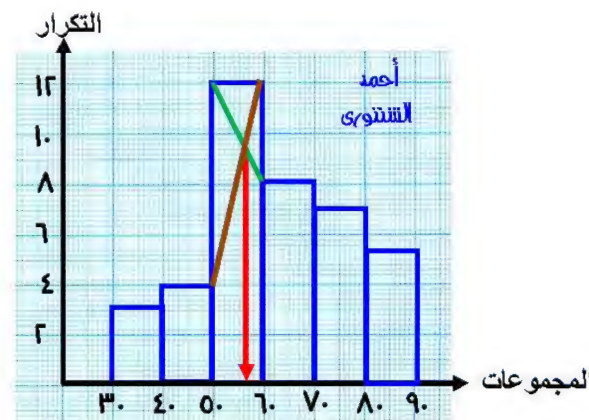
(١١) من الرسم :

المنوال = ٣١



(١٢) من الرسم :

المنوال = 0V



، ٤. = س [١] (١٣)

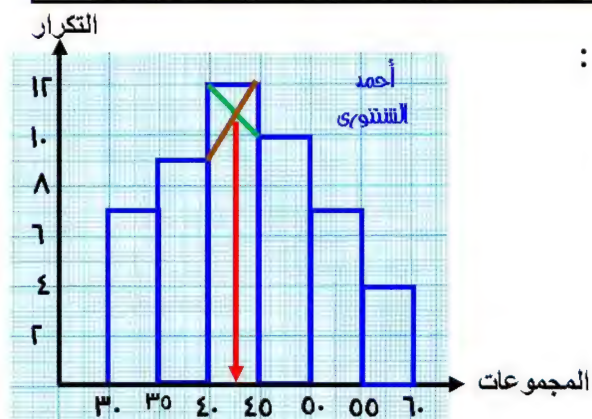
$$0. = 1 + 2 + 1 - 2^3 + 1 + 2^3 + 2^2 + 2^3 + 2 + 2$$

$$3 = 2$$

| | | | | | | | |
|---------|------|------|------|------|------|------|-----------|
| المجموع | - ٥٥ | - ٥٠ | - ٤٥ | - ٤٠ | - ٣٥ | - ٣٠ | المجموعات |
| ٥٠ | ٤ | ٨ | ١٠ | ١٢ | ٩ | ٧ | التكرار |

[٢] من الرسم أكمل :

المُنَوَّال = ٤٣



(١٤) ١٨ [٢] ١٠ [٣] ٧٢ [٤] ٤ [٤] ١٥ [٥] ٦ [٦] الثالث

$$\mathbb{F}[\Lambda] \quad \vee \quad \mathbb{F}[\mathbb{V}]$$

(١٥) [١] المنوال [٢] الوسيط [٣] ١١ [٤] ٦

الوحدة الرابعة متوسطات المثلث و المثلث المتساوي الساقين
الدرس الأول : متوسطات المثلث

(1) متوسط [2] 3 [3] 1:2 [4] $\frac{2}{3}$ 2

$\mathfrak{F} [V]$ $\mathfrak{F} [7]$ $\Sigma [0]$

(٢) [١] ب هـ ، د و متوسطان في $\triangle PBD$

[٢] م نقطة تقاطع متوسطات $\triangle PBD$

$$[٣] م هـ = \frac{1}{2} ب هـ = \frac{1}{2} \times ٩ = ٤.٥ \text{ سم}$$

$$[٤] م د = \frac{1}{2} د هـ = \frac{1}{2} \times ٤ = ٢ \text{ سم}$$

$$[٥] م هـ = \frac{1}{2} ب د = \frac{1}{2} \times ٨ = ٤ \text{ سم}$$

$$[٦] محيط \triangle م هـ د = ٣ + ٢ + ٤ = ٩ \text{ سم}$$

$$[٣] [١] م هـ = \frac{1}{2} ب د = \frac{1}{2} \times ٨ = ٤ \text{ سم}$$

$$[٢] م د = \frac{1}{2} د هـ = \frac{1}{2} \times ٣ = ١.٥ \text{ سم}$$

$$[٣] م هـ = \frac{1}{2} ب د = \frac{1}{2} \times ٨ = ٤ \text{ سم}$$

$$[٤] محيط \triangle م هـ د = ٤ + ٦ + ٤ = ١٤ \text{ سم}$$

(٤) $\triangle PBD$ ع متوازي أضلاع . م منتصف ب هـ

$\triangle م$ متوسط في $\triangle PBD$

، م منتصف ب هـ . م منتصف في $\triangle PBD$

$$\{ و \} = م هـ \cap م د$$

، و نقطة تقاطع متوسطات $\triangle PBD$

$$\therefore م و = \frac{1}{2} م هـ = \frac{1}{2} \times ١٢ = ٦ \text{ سم}$$

$$، م و = \frac{1}{2} م د = \frac{1}{2} \times ٩ = ٤.٥ \text{ سم}$$

$$، م و = \frac{1}{2} ب د = \frac{1}{2} \times ٨ = ٤ \text{ سم}$$

(ضلعان متقابلان في متوازي الأضلاع $\triangle PBD$ ع)

$$\therefore محيط \triangle م و د = ٨ + ٦ + ٤ = ١٨ \text{ سم}$$

(٥) $\triangle PBD$ ع مستطيل . م منتصف ب هـ

، م منتصف في $\triangle PBD$

، م منتصف ب هـ . م منتصف في $\triangle PBD$

$$\{ و \} = م هـ \cap م د$$

، و نقطة تقاطع متوسطات $\triangle PBD$

$$\therefore م و = \frac{1}{2} م هـ = \frac{1}{2} \times ٤ = ٢ \text{ سم}$$

$$، م و = \frac{1}{2} م د = \frac{1}{2} \times ٤ = ٢ \text{ سم}$$

(قطرا المستطيل $\triangle PBD$ ع ، ينصف كل منهما الآخر)

$$\therefore م و = م د = م هـ = ٢ \text{ سم}$$

(٦) م منتصف ب هـ . م منتصف في $\triangle PBD$

$$، م و = م د = م هـ = ٢ \text{ سم}$$

، م نقطة تقاطع متوسطات $\triangle PBD$

$$، م و = م د = م هـ = ٢ \text{ سم}$$

، م منتصف في $\triangle PBD$

$$\therefore م و = م د = م هـ = ٨ \text{ سم}$$

، $\triangle PBD$ فيه : م منتصف ب هـ ، م و // ب هـ

، و منتصف هـ د . م و = $\frac{1}{2} ب هـ = \frac{1}{2} \times ٦ = ٣ \text{ سم}$ ،

(٧) في $\triangle PBD$: م و ($\triangle PBD$) $\therefore ٩٠^\circ$ ، م و = م د

$$\therefore م و = م د = \frac{1}{2} ب د = \frac{1}{2} \times ١٢ = ٦ \text{ سم}$$

، م و ، م و متوسطان في $\triangle PBD$ تقاطعا في نقطة م

، م نقطة تقاطع متوسطات $\triangle PBD$

٩. $\Delta \vdash \neg \Delta$ من $\Delta \vdash \Delta$ يكون : $\vdash (\Delta \vdash \neg \Delta)$

(۱۲) فی $\Delta \vdash \neg$: $\therefore (\neg \vdash \neg)$ ۹.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} \quad \therefore \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \quad , \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$
$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

٩. \therefore من $\Delta \vdash \neg \phi$ يكون : $\neg(\Delta \vdash \phi)$

(۱۳) فی Δ $P \vdash Q : \because (P \supset Q)$

$$\text{سم } \Lambda = 17 \times \frac{1}{2} = 8 \text{ و } \frac{1}{2} = 4 \text{ ب } \therefore \text{٣}^\circ = (8 \angle) \cup ,$$

سم $\lambda = 17 \times \frac{1}{2} = 8 \text{ د } \frac{1}{2} = 4 \text{ ب } \therefore 8 = 4 \text{ د } \therefore$

$$\text{سم } \Lambda = 17 \times \frac{1}{\epsilon} = 17 \times \frac{1}{\epsilon} = 6.8$$

∴ محیط Δ پ ب ع = $\Lambda \times 3 = 24$ سم

(١٤) في Δ ب د : $\therefore \cup (\triangleleft \text{ب د}) = 90^\circ$

$$\text{سم } 7 = 12 \times \frac{1}{6} = 2 \text{ د } \frac{1}{6} = 2 \text{ د } \therefore 3. = (2 \text{ د}) \text{ د}$$
$$\text{سم } 7 = 12 \times \frac{1}{2} = 6 \text{ د } \frac{1}{2} = 6 \text{ ب } \therefore 6 \text{ د} = 6 \text{ ب} \therefore ,$$

∴ \overline{PH} ، \overline{PE} متوسطان في ΔPBD تقاطعا في نقطة م

∴ م نقطة تقاطع متوسطات Δ | ب ح

$$\therefore \text{ب م} = \frac{2}{3} = 6 \times \frac{2}{3} = 4 \text{ سم}$$
$$0 = \Gamma_0 \times \Gamma = \epsilon \cdot \Gamma = \mu$$
$$\therefore \Delta \text{ پ } = 7 + 2 + 0 = 9 \text{ سم}$$
$$٢ \times \frac{٢}{٤} = ١ \quad ١ \times \frac{٢}{٤} = \frac{٢}{٤} = ١ \text{ سم}$$

(٨) في $\Delta \text{ م ه د} : \because \text{د م} = \text{د ه} , \text{ه م} = \text{م د}$

$$\therefore \text{سم } \Lambda = 2 \times 2 = 4 \text{ د } 2 = 2 \text{ د } 2 = 4$$

، في Δ $\mathcal{P} \vdash \neg$: $\mathcal{P} \vdash (\neg \mathcal{P} \supset \neg)$ ، $\mathcal{P} \vdash \mathcal{P}$ ، $\mathcal{P} \vdash \mathcal{P}$

$$\therefore \text{ب} \times \frac{1}{2} = \text{ح} \times \frac{1}{2} = \text{ع} \quad \text{سم} \quad \Sigma = \Lambda \times \frac{1}{2} =$$

(٩) ∴ في Δ بـ پ د : جـ = (د بـ د) جـ ، ° ٩ . = عـ بـ = عـ د

$$(1) \quad \Rightarrow \frac{1}{x} = e \quad \therefore$$

، ∴ في Δ هـ د : ∴ و = و هـ ، هـ م = م ح

$$(۲) \quad \therefore \text{و } \frac{1}{3} = \text{ح} - \text{ه}$$

(۳) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ،

∴ من (۱) ، (۲) ، (۳) ينتج : $\mathbf{b} = \mathbf{e} = \mathbf{e} \text{ و }$

(1.) في Δ $AB \perp DC$: $\therefore \angle A = \angle C$ ، $\angle B = \angle D$

$$\therefore \frac{1}{2}p = d \quad , \quad b = d \quad \therefore$$
$$\therefore \frac{1}{3}p = 2$$

∴ من Δ \vdash ϵ يكون : $\cup (\Delta \vdash \epsilon)$.⁹

(11) في Δ \vdash : \vdash (Δ \vdash) \vdash ٩. °

$$\vdash p \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \vdash p \quad \therefore \quad \vdash \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \vdash p ,$$
$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

∴ مساحة المربع Δ ب د ع = $8 \times 8 = 64$ سم^٢

(١٩) في Δ ع د ه : ∴ \angle ب ه د = 90°

، \angle ه د ع = 30° ∴ \angle ع ه د = 60° (١)

، Δ ب د ع مستطيل فيه ، \angle ه د ع = 30°

∴ \angle ب د ه = 60°

∴ في Δ ع د ه : ∴ \angle ب ه د = 90°

∴ \angle ح د ب ه = 30° ∴ \angle ح ه د = 60° (٢)

من (١) ، (٢) ينتج : \angle ح ه د = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

(٢٠) [١] نصف [٢] نصف [٣] قائمة [٤] ١٠ [٥] ٥ [٦] ٦

الدرس الثاني : المثلث المتساوي الساقين

| رقم الشكل | [١] | [٢] | [٣] |
|----------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| اسم المثلث | مثلث متساوي الساقين | مثلث متساوي الساقين | مثلث متساوي الساقين |
| القاعدة | الزاوية المحصورة | الزاوية المحصورة | الزاوية المحصورة |
| الساقان | الزاوية المحصورة | الزاوية المحصورة | الزاوية المحصورة |
| زاويتي القاعدة | الزاوية المحصورة | الزاوية المحصورة | الزاوية المحصورة |
| زاوية الرأس | الزاوية المحصورة | الزاوية المحصورة | الزاوية المحصورة |
| و نوعها | منفرجة | قائمة | حادة |

(١)

(١٥) في Δ ب د ع : ∴ \angle ب د ع = 90°

، \angle د ب ع = 30° ∴ \angle ب ع د = 60° سم

، في Δ ب د ع : ∴ \angle ب د ع = 90° ، \angle د ب ع = 30° سم

∴ \angle ب د ع = 90°

(١٦) في Δ ب د ع : ∴ \angle ب د ع = 90°

، \angle د ب ع = 30° ∴ \angle ب ع د = 60° سم

، \angle ب د ع = 90° ∴ \angle ب ع د = 60° سم

، في Δ د ع ه فيه : \angle د ع ه = 90°

، \angle د ب ع = 30° ∴ \angle ب ع د = 60° سم

(١٧) في Δ ب ع ه فيه : ∴ \angle ب ع ه = 90°

، \angle د ب ع = 30° ∴ \angle ب ع د = 60° سم

، في Δ ب د ع فيه : ∴ \angle ب د ع = 90° ، \angle د ب ع = 30° سم

∴ \angle ب د ع = 90° سم

(١٨) ∴ Δ ب د ع مربع : ∴ \angle ب د ع = 90° ، \angle د ب ع = 90°

∴ في Δ ب د ه : ∴ \angle ب د ه = 60°

∴ \angle د ب ه = 30° ، \angle د ه ب = 60°

، ∴ في Δ د ه و : \angle د ه و = 90°

∴ \angle د ه و = 30° ، \angle د و ه = 60° سم

الدرس الثالث : نظريات المثلث المتساوي الساقين

$$(1) [1] \text{ س } 00 = \text{ ص } 70, \text{ س } 84 = \text{ ص } 132$$

$$[3] \text{ س } 60 = \text{ ص } 50$$

$$[4] \text{ س } 116 = \text{ ص } 52, \text{ ع } 64$$

$$[5] \text{ س } 20 = \text{ لأن : س } 2 + \text{ س } 2 + \text{ س } 4 + \text{ س } 3 - 10 = 180$$

$$[6] \text{ س } 21 = \text{ لأن : س } 2 + \text{ س } 2 + \text{ س } 12 + \text{ س } 3 + 9 = 180$$

$$[7] \text{ س } 30 = \text{ لأن : س } 3 - 17 = 13$$

$$[8] \text{ س } 66 = \text{ ص } 57$$

$$(2) \Delta \text{ ب د فيه : ب د = د ب = ب د}$$

$$\therefore \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د}$$

$$\Delta \text{ د ب فيه : د ب = ب د = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$\therefore \text{ د ب } = \text{ د ب } = \text{ د ب } = \text{ د ب } = \text{ د ب } = \text{ د ب}$$

$$\text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د}$$

$$\Delta \text{ ب د فيه : ب د = د ب = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$130 = 70 + 60$$

$$\Delta \text{ ب د فيه : ب د = د ب = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$100 = 40 + 60$$

$$(3) \Delta \text{ ب د فيه : ب د = د ب = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$(1) \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د}$$

$$\Delta \text{ ب د فيه : ب د = د ب = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$(2) \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د}$$

$$\text{ من (1) ، (2) بالطرح ينتج : ب د = د ب = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$(4) \Delta \text{ ب د فيه : ب د = د ب = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$\Delta \text{ ب د فيه : ب د = د ب = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$\Delta \text{ ب د فيه : ب د = د ب = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$\Delta \text{ ب د فيه : ب د = د ب = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$\Delta \text{ ب د فيه : ب د = د ب = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$\Delta \text{ ب د فيه : ب د = د ب = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$(5) \Delta \text{ ب د فيه : ب د = د ب = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$\Delta \text{ ب د فيه : ب د = د ب = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$\Delta \text{ ب د فيه : ب د = د ب = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$\Delta \text{ ب د فيه : ب د = د ب = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$\Delta \text{ ب د فيه : ب د = د ب = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$\Delta \text{ ب د فيه : ب د = د ب = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$(6) [1] \text{ ب د = ب د = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$[3] \text{ ع ص = ع س : لأن : ل ع س خارجة عن } \Delta \text{ س ص ع}$$

$$\therefore \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د}$$

$$[4] \text{ ب د = ب د : لأن : ب د = ب د = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$\text{ ومنها : ب د = ب د = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$(7) \text{ ب د = ب د : لأن : ب د = ب د = ب د = ب د = ب د = ب د}$$

$$\therefore \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د}$$

$$\therefore \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د } = \text{ ب د}$$

$\therefore \angle (ه ب ع) = \angle (ه ب د) \therefore ه ب = ه د$
 $\therefore \Delta ه ب د$ متساوى الساقين

(١١) [١] $\angle د$ [٢] ٥٠ [٣] ٤٥ [٤] ٨٤ [٥] ٥٣

[٦] ٥ [٧] ٦٠ [٨] ١٢٠ [٩] قائم الزاوية

(١٢) [١] منفرج الزوية

[٢] ٦٠

[٣] ٤٥

[٦] متساوى الساقين

[٥] منفرجة

[٤] ١٢٠

الدرس الرابع : نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين

(١) $\Delta م ب د$ فيه : $م ب = م د$ ، $\overline{م د} \perp \overline{ب د}$

$\therefore \angle (م د ب) = \angle (م د د) = ٣٢^\circ$

$\therefore \angle (م د ب) = \angle (م د د) = ٣٢^\circ \times ٢ = ٦٤^\circ$

، $ب = د = ع = د = ٦ \times \frac{١}{٢} = ٣$ سم

(٢) $\Delta م ب د$ فيه : $م ب = م د$ ، $\overline{م د} \perp \overline{ب د}$

$\therefore ع = د = م = ٤ \times ٢ = ٨$ سم

، $\angle (م د ب) = \angle (م د د)$

$\therefore \angle (م د ب) = \angle (م د د) = ٩٠^\circ \times \frac{١}{٢} = ٤٥^\circ$

\therefore من $\Delta م ب د$: $\angle (م د ب) = ١٨٠^\circ - (٩٠^\circ + ٤٥^\circ) = ٤٥^\circ$

$\therefore \angle (م د ب) = \angle (م د د)$

$\therefore م ب = م د$

$\therefore \Delta م ب د$ متساوى الساقين

$\therefore \angle (م د ب) = \angle (م د د) \therefore م ب = م د$

$\therefore \Delta م ب د$ متساوى الساقين

(٨) $\therefore \Delta م ب د$ فيه : $م ب = م د$ ، $\angle (م د ب) = ١٢٠^\circ$

$\therefore \angle (م د ب) = \angle (م د د) = \frac{١}{٢} \times (١٨٠^\circ - ١٢٠^\circ)$

$= ٣٠^\circ$

، $\therefore \overline{م د} \perp \overline{ب د} \therefore \angle (م د ب) = \angle (م د د) = ٦٠^\circ$

، $\therefore \overline{م د} \perp \overline{ب د} \therefore \angle (م د ب) = \angle (م د د) = ٦٠^\circ$

\therefore فى $\Delta م ب د$ يكون :

$\angle (م د ب) = \angle (م د د) = ٦٠^\circ + ٦٠^\circ - ١٨٠^\circ = ٦٠^\circ$

$\therefore \angle (م د ب) = \angle (م د د) = ٦٠^\circ$

$\therefore \Delta م ب د$ متساوى الأضلاع

(٩) $\therefore \overline{ب د} \parallel \overline{ع ه} \therefore \angle (م د ب) = \angle (م د د)$ بالتناظر

، $\angle (م د ب) = \angle (م د د)$ بالتناظر

، $\therefore م ب = م د \therefore \angle (م د ب) = \angle (م د د)$

$\therefore \angle (م د ب) = \angle (م د د) \therefore م ب = م د$

$\therefore \Delta م ب د$ متساوى الساقين

، $\therefore م ب = م د$ ، $م ب = م د$

\therefore بالطرح ينتج : $م د = م د$

(١٠) $\therefore \overline{ب د} \parallel \overline{ع ه} \therefore \angle (م د ب) = \angle (م د د)$ بالتبادل

، $\therefore \angle (م د ب) = \angle (م د د)$

$$(٧) \quad \Delta P = \Delta B \quad \therefore P \in \text{محور } \overline{BD} \quad (١)$$

$$\angle (P, \overline{BD}) = \angle (B, \overline{BD})$$

$$\therefore \angle (P, \overline{BD}) = \angle (B, \overline{BD})$$

$$\therefore \text{بالطرح ينتج: } \angle (P, \overline{BD}) = \angle (B, \overline{BD})$$

$$(٢) \quad \Delta H = \Delta B \quad \therefore H \in \text{محور } \overline{BD} \quad (٢)$$

$$\therefore \text{من (١)، (٢) ينتج: } \overline{PH} \text{ محور } \overline{BD}$$

$$(٨) \quad \therefore \text{في } \Delta PBD \text{ فيه: } \Delta P = \Delta B$$

$$\therefore \angle (P, \overline{BD}) = \angle (B, \overline{BD})$$

$$\therefore \overline{PH} \parallel \overline{BD} \quad \therefore \angle (P, \overline{BD}) = \angle (B, \overline{BD}) \text{ بالتناظر}$$

$$\therefore \overline{PH} \parallel \overline{BD} \quad \therefore \angle (P, \overline{BD}) = \angle (B, \overline{BD}) \text{ بالتناظر}$$

$$\therefore \angle (P, \overline{BD}) = \angle (B, \overline{BD}) \quad \therefore \overline{PH} = \overline{BD}$$

$$\therefore \angle (P, \overline{BD}) = \angle (B, \overline{BD})$$

$$(٩) \quad [١] \text{ محور تماثل له } [٢] \text{ محور تماثل لها } [٣] \text{ متساويين}$$

$$[٦] \quad ٣.$$

$$[٥] \quad ١$$

$$[٤] \quad ٣$$

$$[٧] \text{ القاعدة و زاوية رأس المثلث } [٨] \text{ القاعدة و يكون عمودياً عليها}$$

$$(١٠) \quad [١] \quad ٣ \quad [٢] \text{ صل } [٣] \quad \overline{PS} = \overline{BS}$$

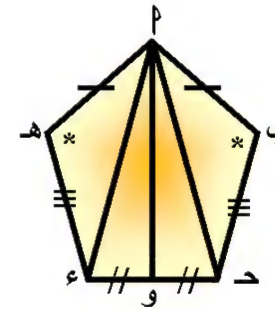
$$[٤] \text{ محور تماثل } [٥] \text{ صفر } [٦] \quad ١ \quad [٧] \text{ محور تماثل}$$

للأمانة العلمية

يرجى عدم حذف أسمى نهائياً

يسمح فقط بإعادة النشر

دون أي تعديل



$$(٣) \text{ نصل } \overline{PD}, \overline{PB}$$

$$\Delta PBD, \Delta PDE \text{ فيهما:}$$

$$\Delta P = \Delta B, \quad \Delta P = \Delta D, \quad \Delta P = \Delta E$$

$$\angle (P, \overline{BD}) = \angle (P, \overline{DE})$$

$$\therefore \text{ينطبق المثلثان و ينتج أن: } \Delta P = \Delta D$$

$$\therefore \Delta PDE \text{ فيه: } \Delta P = \Delta D$$

$$\therefore \overline{PD} = \overline{DE} \quad \therefore \overline{PD} \perp \overline{DE}$$

$$(٤) \quad \Delta P = \Delta B \quad \therefore P \in \text{محور } \overline{BD}$$

$$\therefore \Delta H = \Delta B \quad \therefore H \in \text{محور } \overline{BD}$$

$$\therefore \overline{PH} \text{ محور } \overline{BD}$$

$$\therefore \overline{PH} \perp \overline{BD}, \quad \therefore \overline{PD} = \overline{DE}$$

$$\therefore \Delta P = \Delta B \quad \therefore \Delta P = \Delta D \quad \therefore \Delta P = \Delta E$$

$$\therefore \text{من } \Delta PDE \text{ القائمة الزاوية في } E \text{ يكون:}$$

$$\angle (P, \overline{BD}) - \angle (P, \overline{DE}) = \angle (P, \overline{BD}) - \angle (P, \overline{DE}) = \angle (P, \overline{DE})$$

$$179 = 20 - 144 = 144 \quad \therefore \Delta P = \Delta D \quad \therefore \Delta P = \Delta E$$

$$(٥) \quad \Delta P = \Delta B, \quad \Delta P = \Delta D \quad \therefore \overline{PD} = \overline{DE}$$

$$\therefore \overline{PD} \perp \overline{DE} \quad \therefore \overline{PD} \perp \overline{DE}$$

$$(٦) \quad \Delta P = \Delta B \text{ فيه: } \Delta P = \Delta D, \quad \Delta P = \Delta E$$

$$\therefore \overline{PD} = \overline{DE} \quad \therefore \overline{PD} \perp \overline{DE}$$

$$\therefore \Delta P = \Delta B \text{ فيه: } \Delta P = \Delta D, \quad \Delta P = \Delta E$$

$$\therefore \overline{PD} = \overline{DE} \quad \therefore \overline{PD} \perp \overline{DE}$$

$$\therefore \overline{PD} = \overline{DE} \quad \therefore \overline{PD} \perp \overline{DE}$$

الوحدة الخامسة

التباين

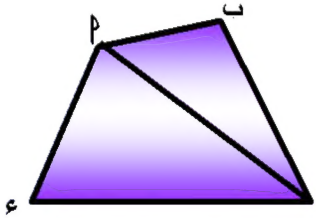
الدرس الأول : التباين

$$\begin{aligned}
 (1) & \quad [1] > [2] < [3] \\
 (2) & \quad [1] < [2] < [3] < [4] \\
 (3) & \quad [1] < [2] < [3] < [4] < [5] \\
 (4) & \quad \angle B < \angle C \\
 (5) & \quad \angle B + \angle C < \angle A + \angle D \quad \angle B < \angle A, \angle C < \angle D \\
 (6) & \quad \angle B - \angle C < \angle A - \angle D \quad \angle B < \angle A, \angle C < \angle D \\
 (7) & \quad \angle B = \angle C \quad \angle B < \angle A, \angle C < \angle D \\
 (8) & \quad \angle B < \angle A, \angle C < \angle D \\
 (9) & \quad [1] < [2] < [3] < [4] < [5]
 \end{aligned}$$

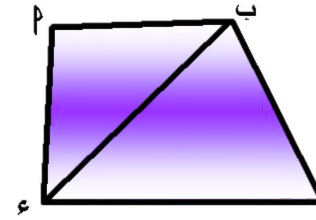
أحمد الشنتوري

الدرس الثاني : المقارنة بين قياسات الزوايا في المثلث

$$\begin{aligned}
 (1) & \quad \angle B < \angle C \quad \angle B < \angle A, \angle C < \angle A \\
 (2) & \quad \angle B < \angle C \quad \angle B < \angle A, \angle C < \angle A \\
 (3) & \quad \angle B < \angle C \quad \angle B < \angle A, \angle C < \angle A \\
 (4) & \quad \angle B < \angle C \quad \angle B < \angle A, \angle C < \angle A \\
 (5) & \quad \angle B < \angle C \quad \angle B < \angle A, \angle C < \angle A \\
 (6) & \quad \angle B < \angle C \quad \angle B < \angle A, \angle C < \angle A \\
 (7) & \quad \angle B < \angle C \quad \angle B < \angle A, \angle C < \angle A \\
 (8) & \quad \angle B < \angle C \quad \angle B < \angle A, \angle C < \angle A \\
 (9) & \quad \angle B < \angle C \quad \angle B < \angle A, \angle C < \angle A
 \end{aligned}$$



(٤) نصل بـ ع



$\triangle BAE$ فيه : $\angle B = \angle E$

$\therefore \angle BAE = \angle EBA$

$\triangle BCD$ فيه : $\angle C = \angle D$

$\therefore \angle BCD = \angle CDB$

$\therefore \angle BAE + \angle BCD = \angle EBA + \angle CDB$

$\angle BAE + \angle BCD = \angle EBA + \angle CDB$

$\therefore \angle BAE = \angle EBA$

(٥) $\triangle BAE$ فيه : $\angle B < \angle E$

$\therefore \angle BAE < \angle EBA$

$\therefore \angle BAE = \angle EBA$

$\angle BAE = \angle EBA$

$\therefore \angle BAE < \angle EBA$

(٦) \overline{BE} ، \overline{BD} متوسطان في $\triangle ABC$ تقاطعا في نقطة م

\therefore نقطة تقاطع متوسطات $\triangle ABC$

$\therefore \angle BME = \angle DME$ ، $\angle BME = \angle DME$

$\therefore \angle BME < \angle DME$ ، $\angle BME < \angle DME$

$\therefore \angle BME < \angle DME$ ، $\angle BME < \angle DME$

\therefore من $\triangle BME$ يكون : $\angle BME > \angle DME$

(٧) $\triangle BDE$ فيه : $\angle B < \angle E$

$\therefore \angle BDE < \angle BED$

، $\triangle BDE$ مستطيل

$\therefore \angle BDE = \angle BED = 90^\circ$

$\therefore \angle BDE = \angle BED = 90^\circ$ ، $\angle BDE < \angle BED$

$\therefore \angle BDE > \angle BED$

(٨) $\triangle BDE$ متساوي الأضلاع

$\therefore \angle BDE = \angle BED = 60^\circ$

$\therefore \angle BDE < \angle BED$

$\therefore \angle BDE < \angle BED$

$\angle BDE = \angle BED$

$\therefore \angle BDE < \angle BED$

$\therefore \angle BDE = \angle BED$

$\therefore \angle BDE = \angle BED$

$\therefore \angle BDE < \angle BED$

$\therefore \angle BDE < \angle BED$

$\therefore \angle BDE < \angle BED$

(٩) [١] أصغر [٢] أكبر [٣] [٤] <

[٥] $\angle BDE < \angle BED$

(١٠) [١] > [٢] $\angle BDE < \angle BED$ [٣] >

الدرس الثالث : المقارنة بين أطوال الأضلاع في المثلث

$$(1) [1] < [2] > [3] > [4]$$

$$(2) \overline{PM} \parallel \overline{BH} \therefore \angle PMH = \angle BHM = \angle BHM \text{ بالتبادل}$$

$$\angle PMH = \angle BHM = \angle BHM \text{ بالتناظر}$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH < \angle BHM \therefore PM < BH$$

$$(3) \overline{PM} \parallel \overline{BH} \therefore$$

$$\angle PMH = \angle BHM = \angle BHM \text{ بالتبادل}$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH < \angle BHM \therefore PM < BH$$

$$\therefore PM < BH$$

$$(4) \text{ نصل } \overline{PE}$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$(5) \therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

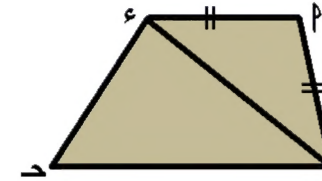
$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

أحمد الشنتوي



$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$(6) \therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$(7) \therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$(8) \therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$(9) \therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

$$\therefore \angle PMH = \angle BHM \text{ فيه : } \angle PMH = \angle BHM$$

الدرس الرابع : متباينة المثلث المثلث

$$(1) [1] \text{ لا تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث}$$

$$\text{لأن : } 9 = 6 + 3$$

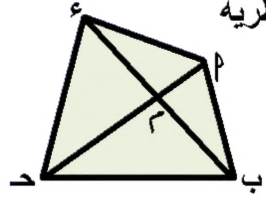
∴ $٢م + ٢ب + ٢د < \frac{1}{2}$ محيط $\Delta م ب د$

(٧) بفرض أن : $م ب د$ مثلث ∴ $م ب > د + ب$

بإضافة $م ب$ للطرفين ∴ $٢م ب > م ب + د + ب$

∴ $٢م ب > \text{محيط } \Delta م ب د$ ∴ $م ب > \frac{1}{2}$ محيط $\Delta م ب د$

(٨) ليكن $م ب د$ شكلاً رباعياً ، $م$ نقطة تقاطع قطريه



من $\Delta م ب د$: $م ب > م + د$ (١)

من $\Delta م ب د$: $م ب > م + د$ (٢)

من $\Delta م ب د$: $م ب > م + د$ (٣)

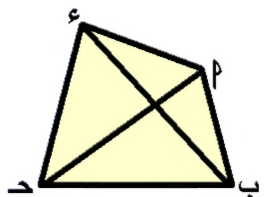
من $\Delta م ب د$: $م ب > م + د$ (٤)

بجمع (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) ينتج :

$م ب + م ب + م ب + م ب < (م + د) + (م + د) + (م + د) + (م + د)$

∴ $٢م ب + ٢م ب + ٢م ب + ٢م ب < ٤(م + د)$

(٩) ليكن $م ب د$ شكلاً رباعياً محدباً



من $\Delta م ب د$: $م ب < م + د$ (١)

من $\Delta م ب د$: $م ب < م + د$ (٢)

من $\Delta م ب د$: $م ب < م + د$ (٣)

من $\Delta م ب د$: $م ب < م + د$ (٤)

بجمع (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) ينتج :

$٢م ب + ٢م ب + ٢م ب + ٢م ب < ٤(م + د)$

∴ $٢م ب + ٢م ب + ٢م ب + ٢م ب < ٤(م + د)$

[٢] $٧ ، ١٠ ، ٦$ تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

لأن : $١٠ = ٧ + ٦$ ∴ $١٠ < ١٣$

[٣] $٥ ، ٥ ، ٥$ تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

لأن : $٥ = ٥ + ٥$ ∴ $٥ < ١٠$

[٤] $٦ ، ٤ ، ٤$ لتصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

لأن : $٦ = ٤ + ٤$ ∴ $٦ < ٨$

[٥] $١١ ، ٦ ، ٤$ لا تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

لأن : $١١ = ٦ + ٤$ ∴ $١١ > ١٠$

(٢) نفرض أن : طول الضلع الثالث = $ل$ سم

∴ $٥ - ٨ > ل > ٥ + ٨$ ∴ $١٣ > ل > ٣$

∴ $ل \in [٣ ، ١٣]$

(٣) $[١] < [٢] > [٣] ٦ [٤] ١٢ [٥] ٨ [٦] ٣ [٧] ١١$

$[٧] ١٢ ، ٣ [٨] ٣ ، ٧ ، ٧ ، ٣ [٩] ٩$

(٤) [١] أصغر من [٢] ٤ [٣] ٥ [٤] ٩

[٥] {٥ ، ٣ ، ٣} [٦] ١٥ ، ٥ [٧] ٢ [٨] ٢

(٥) من $\Delta م ب د$: $م ب < م + د$ ∴ $م ب = م + د$

∴ $م ب + م ب < م + د + م + د$

(٦) من $\Delta م ب د$: $م ب < م + د$ (١)

من $\Delta م ب د$: $م ب < م + د$ (٢)

من $\Delta م ب د$: $م ب < م + د$ (٣)

بجمع (١) ، (٢) ، (٣) ينتج :

$٢م ب + ٢م ب + ٢م ب < ٢م + ٢د + ٢م + ٢د + ٢م + ٢د$